

# QUELQUES ASPECTS NUMÉRIQUES DE LA COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE

Frédéric Bonnans <sup>1</sup>

24 juillet 2009

<sup>1</sup>Projet Commands, INRIA-Saclay et Ecole Polytechnique, France. Frederic.Bonnans@inria.fr

Ce polycopié est une version actualisée et complétée des cours d'introduction à la commande optimale stochastique donnés dans le cadre du mastère de mathématiques appliquées de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, du 19 au 23 janvier 2004, à l'invitation de Henda El Fekih, directrice du LAMSIN, et de l'Ecole CIMPA Analyse, Optimisation et Commande Optimale, Lima, Pérou, du 9 au 27 février 2004, organisée par Marc Lassonde, professeur à l'Université Antilles-Guyane.

Après une brève présentation des problèmes de commande optimale de chaînes de Markov, et une dérivation formelle de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, on présente quelques schémas de résolution numérique de type différences finies.

Le principe de comparaison des sur et sous solutions est exposé en détail, et le cours se termine par une discussion des estimations d'erreur des schémas numériques.

L'actualisation fin 2008 consiste principalement en l'amélioration de la minoration de la solution du schéma de différences finies dans le chapitre 3 (qui fait passer l'estimation de  $h^{1/3}$  à  $h^{1/2}$ ), et la discussion de l'estimation inverse et des questions ouvertes. Il faut noter qu'en dehors des points techniques, la grande question ouverte est l'obtention d'estimations d'erreur pour des hamiltoniens non convexes (cas des jeux par exemple).

L'actualisation de juillet 2009 détaille certains points des estimations d'erreur, analyse les algorithmes semi lagrangiens, et a bénéficié d'une relecture d'Imène Ben Latifa, de l'ENIT.

L'auteur remercie les organisateurs de ces cours pour leurs invitations, ainsi que les élèves et collègues pour leurs remarques et questions qui ont contribué à l'amélioration du texte.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Chaînes de Markov commandées</b>	<b>22 07 09</b>	<b>5</b>
1.1	Problèmes à horizon fini		5
1.1.1	Quelques exemples		5
1.1.2	Chaînes de Markov et valeurs associées		5
1.1.3	Quelques lemmes		7
1.1.4	Principe de Programmation dynamique		8
1.2	Problèmes à horizon infini		9
1.2.1	Caractérisation des solutions		9
1.2.2	Analyse de sensibilité		11
1.2.3	Algorithmes numériques		12
1.3	Extensions		14
1.3.1	Problèmes de temps de sortie		14
1.3.2	Problèmes avec décision d'arrêt		15
1.3.3	Un algorithme implémentable		16
1.4	Notes		19
<b>2</b>	<b>Problèmes en temps et espace continus</b>	<b>22 07 09</b>	<b>21</b>
2.1	Approche informelle de l'équation HJB		21
2.1.1	Position du problème		21
2.1.2	Problème discrétisé en temps		22
2.2	Schémas de différences finies		23
2.2.1	Schémas monotones : dimension 1		23
2.2.2	Différences finies classiques		25
2.2.3	Différences finies généralisées		28
2.2.4	Analyse de la condition de consistance forte		30
2.3	Notes		32
<b>3</b>	<b>Estimations d'erreur</b>	<b>24 07 09</b>	<b>33</b>
3.1	Principe de comparaison		33
3.1.1	Solutions de viscosité		33
3.1.2	Lemme d'Ishii		36
3.1.3	Séparation des variables		39
3.1.4	Principe de comparaison abstrait		41

3.1.5	Unicité forte en commande optimale stochastique . . . . .	43
3.2	Estimations d'erreur . . . . .	44
3.2.1	Immersion du schéma dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	44
3.2.2	Cas de solutions lisses . . . . .	45
3.2.3	Un procédé général . . . . .	47
3.2.4	Minoration . . . . .	48
3.2.5	Majoration de la solution du schéma . . . . .	51
3.3	Algorithme semi lagrangien . . . . .	52
3.3.1	Principe . . . . .	52
3.3.2	Stabilité de la solution du schéma . . . . .	52
3.3.3	Erreur de consistance . . . . .	55
3.3.4	Estimation d'erreur . . . . .	56
3.3.5	Discretisation spatiale . . . . .	56

# Chapitre 1

## Chaînes de Markov commandées

22 07 09

### 1.1 Problèmes à horizon fini

#### 1.1.1 Quelques exemples

Un exemple classique de commande de chaînes de Markov est la *gestion de stock* : les achats des clients arrivent de manière aléatoire, et la commande consiste à réapprovisionner, avec paiement de pénalités pour tout achat non honoré. Autre exemple, la maintenance d'un parc d'outils de production. L'état du système est l'ensemble des outils en état de fonctionnement, et la commande consiste à effectuer les réparations des outils en panne. Il s'agit au fond de *conception de systèmes fiables*.

Enfin les problèmes de commande optimale (déterministes ou stochastiques) en espace continu (et temps continu ou discret) résolus en discrétisant l'équation HJB reviennent, comme on le verra, à résoudre un problème de commande d'une chaîne de Markov. En particulier, les problèmes d'évaluation d'options financière, d'identification de volatilité implicite, et de gestion de portefeuille sont de cette nature.

#### 1.1.2 Chaînes de Markov et valeurs associées

Considérons un *système dynamique* dont l'état peut prendre un nombre fini ou dénombrable de valeurs, soit  $1, \dots, m$ , avec  $m$  fini ou non. Il est utile de traiter le cas  $m = \infty$  pour discuter le problème de discrétisation de systèmes continus.

On note  $x^k$  la valeur de l'état au temps  $k$ , où  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose connue la probabilité  $M_{ij}^k$  de transition de l'état  $i$  au temps  $k$ , à l'état  $j$  au temps  $k + 1$ . Autrement dit, notant  $\mathcal{P}$  la loi de probabilité, on a

$$\mathcal{P}(x^{k+1} = j | x^k = i) = M_{ij}^k. \quad (1.1)$$

On supposera cette loi *markovienne*, c'est à dire

$$\mathcal{P}(x^{k+1} = j | x^k = i, x^{k-1} = i_{k-1}, \dots, x^0 = i_0) = M_{ij}^k. \quad (1.2)$$

Ceci signifie que si on connaît la valeur de l'état au temps  $k$ , la connaissance des états passés n'apporte rien pour la prédiction du futur.

La "matrice"  $M^k = \{M_{ij}^k\}$ , où  $i$  et  $j$  varient de 1 à  $m$ , est le tableau (fini ou non) de valeur  $M_{ij}^k$  en ligne  $i$  et colonne  $j$ . Tous ses éléments sont positifs ou nuls, et la somme des éléments d'une ligne vaut 1. Une telle matrice est dite *stochastique*.

Si  $m = \infty$ , l'extension naturelle du calcul matriciel : produit de deux matrices, produit d'une matrice avec un vecteur (vertical) à droite ou (horizontal) à gauche, et produit de deux matrices, demande quelques précautions : il faut que les quantités en jeu soient sommables. Plus précisément, soient  $\ell^1$  et  $\ell^\infty$ , respectivement, l'espace des suites sommables et bornées, dont les éléments sont indicés de 1 à  $m$ , et représentés comme des vecteurs horizontaux (pour  $\ell^1$ ) et verticaux (pour  $\ell^\infty$ ). Si  $x \in \ell^1$  et  $v \in \ell^\infty$ , et si  $M$  est une matrice stochastique, on peut définir leur produit  $xM \in \ell^1$  et  $Mv \in \ell^\infty$  par

$$(xM)_j := \sum_{i=1}^m x_i M_{ij}; \quad (Mv)_i := \sum_{j=1}^m M_{ij} v_j.$$

On a en effet  $\|xM\|_1 \leq \|x\|_1$  et  $\|Mv\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ . Autrement dit, une matrice stochastique est *non expansive* à droite et à gauche. Si  $M^1$  et  $M^2$  sont deux matrices stochastiques, on peut définir leur produit  $M^1 M^2$  par

$$(M^1 M^2)_{ij} := \sum_{k=1}^m M_{ik}^1 M_{kj}^2.$$

Il est facile de vérifier que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique. On interprètera

$$\left\{ p \in \ell^1; \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1 \right\}$$

comme l'*espace de probabilités* pour l'état du système à un temps donné, et  $\ell^\infty$  comme un *espace de valeurs*. Notons que si  $p$  est une probabilité, et  $M$  est stochastique, alors  $pM$  est une probabilité.

Si l'état  $x^k$  du système à l'instant  $k$  est connu, la loi de probabilité de  $x^{k+1}$  est la ligne de  $M^k$  d'indice  $x^k$ . Si on dispose seulement d'une loi de probabilité pour  $x^k$ , notée  $p^k = (p_1^k, \dots, p_m^k)$ , et considérée comme un vecteur horizontal, alors la loi de probabilité de  $x^{k+1}$  vérifie l'*équation de Kolmogorov avant*

$$p^{k+1} := \mathcal{P}(x^{k+1}|p^k) = \sum_i p_i^k M_{i.}^k = p^k M^k, \quad (1.3)$$

d'où on déduit par récurrence, si la probabilité initiale est  $p^0$ ,

$$\mathcal{P}(x^{k+1}|p^0) = p^0 M^0 M^1 \dots M^k. \quad (1.4)$$

Associons maintenant à ce processus la *fonction coût*  $\{c_i^k\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $c^k := \{c_i^k\}_{i=1, \dots, m}$  appartient à  $\ell^\infty$ , ce qui veut dire que les coûts sont

uniformément bornés en espace, et que  $c^k$  est représenté comme un vecteur vertical. Soit  $\varphi$  une application  $\{1, \dots, m\} \rightarrow \ell^\infty$ , appelée coût final. Définissons la *fonction valeur* du problème avec état initial  $i$  et instant initial  $k$  comme

$$V_i^k := \mathbb{E} \left( \sum_{\ell=k}^{N-1} c_{x^\ell}^\ell + \varphi(x^N) \mid x^k = i \right). \quad (1.5)$$

Ici  $N > 0$  est l'*horizon*, et  $\mathbb{E}$  représente l'*espérance mathématique*.

**Proposition 1.1** *Pour tout  $k = 0, \dots, N$ , la fonction valeur  $V^k$  est bien définie et appartient à  $\ell^\infty$ . De plus, la suite  $\{V^k\}$  est solution de l'équation de récurrence de Kolmogorov arrière*

$$\begin{cases} V^k = c^k + M^k V^{k+1}, & k = 0, \dots, N-1, \\ V^N = \varphi. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Proof.** La condition finale est triviale. De plus, si  $x^k$  a la valeur  $i$ , alors d'après l'équation de Kolmogorov avant

$$V_i^k = c_i^k + \sum_{j=1}^m M_{ij}^k V_j^{k+1},$$

d'où le résultat. ■

Considérons maintenant un problème avec  $c^k = c \in \ell^\infty$  et  $M^k = M$  indépendants du temps, *horizon infini*, et taux d'actualisation  $\beta \in ]0, 1[$ . La valeur de ce problème, c'est à dire

$$V_i := \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} c_{x^k} \mid x^0 = i \right), \quad (1.7)$$

est bien définie et appartient à  $\ell^\infty$ . En raison de l'équation de Kolmogorov avant, elle est solution de l'équation

$$V = \beta(c + MV). \quad (1.8)$$

Comme  $M$  est non expansive, cette équation est celle d'un opérateur de point fixe strictement contractant et a donc une solution unique.

### 1.1.3 Quelques lemmes

Commençons par le rappel du théorème de point fixe de Banach-Picard.

**Lemme 1.2** *Soient  $X$  un espace de Banach et  $C$  une partie fermée de  $X$ . Soit  $T$  un opérateur contractant de  $C$  vers lui même. Autrement dit, il existe  $c \in [0, 1[$  tel que, si  $x^i \in C$ ,  $i = 1, 2$ , alors  $Tx^i \in C$ ,  $i = 1, 2$ , et*

$$\|Tx^2 - Tx^1\| \leq c\|x^2 - x^1\|. \quad (1.9)$$

*Alors  $T$  a un unique point fixe  $x^* \in C$  (c.a.d. l'équation  $Tx = x$  a pour solution unique  $x^*$ ). De plus, quel que soit  $x^0 \in C$ , la suite  $\{x^k\}$  telle que  $x^{k+1} = Tx^k$  converge vers  $x^*$ , et*

$$\|x^k - x^*\| \leq c^k \|x^0 - x^*\|. \quad (1.10)$$

Voici un autre lemme, qui sera utile à plusieurs reprises.

**Lemme 1.3** *Soit  $M$  une matrice stochastique,  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $w \in \ell^\infty$  tels que  $w \leq \varepsilon \mathbf{1} + \beta M w$ . Alors  $w \leq (1 - \beta)^{-1} \varepsilon \mathbf{1}$ .*

**Proof.** On a  $M w \leq (\sup w) \mathbf{1}$  puisque  $M$  est une matrice stochastique, et donc  $w \leq (\varepsilon + \beta \sup w) \mathbf{1}$ . En conséquence,  $\sup w \leq \varepsilon + \beta \sup w$ , d'où la conclusion. ■

### 1.1.4 Principe de Programmation dynamique

Considérons maintenant une chaîne de Markov dont les probabilités de transition  $M_{ij}(u)$  dépendent d'une variable de commande  $u \in U_i$ , où  $U_i$  est un ensemble quelconque dépendant de l'état  $i$  (certains résultats supposeront  $U_i$  métrique compact). Donnons nous des coûts dépendant de la commande, de l'état, et du temps, soit  $c_i^k(u) : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée, c'est à dire telle que

$$\|c\|_\infty := \sup \left\{ |c_i^k(u)|; 1 \leq i \leq m; u \in U_i; 0 \leq k \leq N-1 \right\} < \infty. \quad (1.11)$$

On considère le problème de minimisation du critère sur horizon fini

$$V_i^k(u) := \mathbb{E} \left( \sum_{\ell=k}^{N-1} c_{x^\ell}^\ell(u^\ell) + \varphi(x^N) \mid x^k = i \right). \quad (1.12)$$

Ici  $u^\ell$  est la valeur de la commande au temps  $\ell$ ; pour donner un sens à ce problème, il faut spécifier l'information dont on dispose au temps  $k$  pour choisir la valeur de  $u^k$ . Nous allons nous limiter au cas de l'*observation complète*, dans lequel l'état  $x^k$  est connu. Ceci permet de choisir la commande en fonction de l'état  $x$ , et bien sûr du temps  $k$ . Autrement dit, on choisit une stratégie de *retour d'état*, c'est à dire un élément de l'ensemble

$$\mathcal{U} := \text{ensemble des applications } (\ell, i) \mapsto u_i^\ell, \text{ avec } \ell \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, m\}, \text{ et } u_i^\ell \in U_i. \quad (1.13)$$

On considère donc le problème de calcul d'un retour d'état optimal minimisant simultanément les différentes fonctions  $V_i^k$  :

$$\begin{cases} V_i^k & := \inf_u V_i^k(u); \quad u_i^k \in U_i \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ V_i^N & := \varphi(i), \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.14)$$

**Proposition 1.4** *La fonction valeur  $V^k$ , solution du problème (1.14) avec observation complète, est solution du principe de programmation dynamique*

$$\begin{cases} V_i^k = \inf_{u_i \in U_i} \left\{ c_i^k(u_i) + \sum_j M_{ij}^k(u_i) V_j^{k+1} \right\}, & i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, N-1, \\ V^N = \varphi. \end{cases} \quad (1.15)$$



De plus, l'ensemble  $\bar{U}_i^k$  (éventuellement vide) des commandes optimales à l'instant  $k$  lorsque  $x^k = i$  est

$$\bar{U}_i^k = \operatorname{argmin}_{u_i \in U_i} \left\{ c_i^k(u_i) + \sum_j M_{ij}^k(u_i) V_j^{k+1} \right\}. \quad (1.16)$$

**Proof.** On raisonne par récurrence. Il est clair que  $V^N = \varphi$ . Fixons  $k < N$  et  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $x^k = i$ , d'après l'équation de Kolmogorov arrière, le choix de la commande  $u_i$  à l'instant  $k$  donne la valeur  $c_i^k(u_i) + \sum_j M_{ij}^k(u_i) V_j^{k+1}$ . On obtient donc  $V_i^k$  en prenant l'infimum de cette quantité, et une commande est optimale si elle appartient à l'argument du minimum. De plus la quantité

$$\|V^k\|_\infty \leq \sup_u \|c^k(u)\| + \|V^{k+1}\|_\infty$$

est bien bornée. ■

## 1.2 Problèmes à horizon infini

### 1.2.1 Caractérisation des solutions

Dans cette section, nous supposons la fonction coût et la matrice de transition indépendantes du temps, notées  $c(u)$  et  $M(u)$ , et le coût actualisé avec un coefficient  $\beta \in ]0, 1[$ . Le théorème suivant caractérise les stratégies optimales.

**Théorème 1.5** (i) *Dans le cas de l'observation complète, la fonction valeur définie par*

$$V_i := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} c_{x^k}(u_{x^k}) \mid x^0 = i \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.17)$$

où  $\beta \in ]0, 1[$ , satisfait

$$\|V\| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \|c\|_\infty. \quad (1.18)$$

De plus, c'est la solution unique de l'équation de programmation dynamique suivante : trouver  $v \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$v_i = \beta \inf_{u_i \in U_i} \left\{ c_i(u_i) + \sum_j M_{ij}(u_i) v_j \right\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.19)$$

(ii) Soit  $\varepsilon \geq 0$  et  $u \in \mathcal{U}$  une stratégie telle que, pour tout  $1 \leq i \leq m$  :

$$\beta \left( c_i(u_i) + \sum_j M_{ij}(u_i) V_j \right) \leq V_i + \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.20)$$

Posons  $\varepsilon' := (1 - \beta)^{-1}\varepsilon$ . Alors la stratégie  $u$  est  $\varepsilon'$  sous optimale, dans le sens où la valeur associée  $V(u)$  satisfait

$$V_i(u) \leq V_i + \varepsilon', \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.21)$$

(iii) L'existence d'une stratégie optimale est assurée si

$$\begin{cases} U_i \text{ est métrique compact pour tout } i, \\ \text{Les fonctions } c_i(u) \text{ et } M_{ij}(u) \text{ sont continues pour tout } i \text{ et } j. \end{cases} \quad (1.22)$$

**Proof.** a) Montrons d'abord que (1.19) possède une solution unique. Cette équation est de la forme  $v = Tv$ , avec

$$(Tw)_i := \beta \inf_{u_i \in U_i} \left\{ c_i(u_i) + \sum_j M_{ij}(u_i) w_j \right\}. \quad (1.23)$$

Montrons que  $T$  est un opérateur contractant dans  $\ell^\infty$ . On a

$$\|Tw\|_\infty \leq \beta(\|c\|_\infty + \|w\|_\infty), \quad (1.24)$$

ce qui montre que  $T$  est un opérateur de  $\ell^\infty$  dans lui même. Utilisant la règle

$$\inf_u a(u) - \inf_u b(u) \leq \sup_u (a(u) - b(u)) \quad (1.25)$$

et étant donnés  $w$  et  $w'$  dans  $\ell^\infty$ , utilisant le fait que la somme des éléments d'une ligne de  $M(u)$  vaut 1, il vient :

$$|(Tw')_i - (Tw)_i| \leq \beta \sup_{u_i \in U_i} \sum_{j=1}^m |M_{ij}(u_i)(w' - w)_j| \leq \beta \|w' - w\|_\infty.$$

En conséquence,  $T$  est une contraction de rapport  $\beta$  dans  $\ell^\infty$ . Il découle alors du lemme 1.2 que l'équation (1.19) a une solution unique  $v^*$ , et (1.18) est conséquence de (1.24).

b) Soit  $u \in \mathcal{U}$  une stratégie et  $V(u)$  la valeur associée, solution de

$$V(u) = \beta(c(u) + M(u)V(u)). \quad (1.26)$$

Montrons que  $v^* \leq V(u)$ . En effet, soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Utilisant

$$v^* \leq \beta(c(u) + M(u)v^*), \quad (1.27)$$

il vient

$$v^* - V(u) \leq \beta M(u)(v^* - V(u)). \quad (1.28)$$

Le lemme 1.3 assure que  $v^* \leq V(u)$ , comme il fallait le démontrer.

c) Etant donné  $\varepsilon \geq 0$ , soit  $\tilde{u}$  une stratégie satisfaisant (1.20) (une telle stratégie existe si  $\varepsilon > 0$ ), et  $\tilde{V}$  la valeur associée. Utilisant  $\tilde{V} = \beta(c(\tilde{u}) + M(\tilde{u})\tilde{V})$  et (1.20), il vient

$$\tilde{V} - v^* \leq \varepsilon \mathbf{1} + \beta M(\tilde{u})(\tilde{V} - v^*). \quad (1.29)$$

On en déduit (1.21) avec le lemme 1.3. D'autre part, on sait que  $v^* \leq V$  pour toute valeur  $V$  associée à une stratégie. Il en résulte que  $v^*$  est égal à la valeur  $V$ , d'où (i) et (ii).

(d) D'après le point (ii), l'existence d'une stratégie optimale équivaut à la possibilité d'atteindre, pour tout état  $i$ , l'infimum dans (1.19). Montrons que ceci est conséquence des hypothèses du point (iii). Pour  $i$  fixé, notons  $\{u_i^q\}$  une suite minimisante de l'infimum dans (1.19) ; autrement dit  $u_i^q \in U_i$ , et  $c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q)V_j \rightarrow V_i$ . Puisque  $U_i$  est métrique compact, extrayant une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que la suite converge vers  $\bar{u}_i \in U_i$ . A tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on peut associer une partition  $(I, J)$  de  $\{1, \dots, m\}$ , telle que  $I$  est de cardinal fini et  $\sum_{j \in I} M_{ij}(\bar{u}_i) \geq 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ . Puisque  $I$  est fini, pour  $q$  assez grand, on a  $\sum_{j \in I} M_{ij}(u_i^q) \geq 1 - \varepsilon$ , et donc  $\sum_{j \in J} M_{ij}(u_i^q) \leq \varepsilon$ . De là

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left| \limsup_q (c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q)V - c_i(\bar{u}_i) - \sum_j M_{ij}(\bar{u}_i)V) \right| \\ &= \left| \limsup_q \sum_{j \in J} (M_{ij}(u_i^q) - M_{ij}(\bar{u}_i))V_j \right| \\ &\leq \limsup_q \sum_{j \in J} |M_{ij}(u_i^q) - M_{ij}(\bar{u}_i)| \|V\|_\infty \leq 2\varepsilon \|V\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit (iii). ■

### 1.2.2 Analyse de sensibilité

On aura besoin, dans la discussion de la discrétisation des problèmes à espace d'état continu, de résultats de sensibilité de la valeur par rapport aux données  $c$  et  $M$ . Soient  $(c, M)$  et  $(c', M')$  coûts et matrice de transition de chaîne de Markov commandées avec les mêmes ensembles de commandes admissibles  $U$  et coefficient d'actualisation  $\beta$ . On notera  $V$  et  $V'$  les valeurs associées,  $W := V' - V$ , ainsi que la *pseudonorme*

$$\|M\|_* := \sup_i \sum_{j \neq i} |M_{ij}| \quad (1.30)$$

(norme de la partie non diagonale de  $M$ , induite de la norme uniforme) qui est en quelque sorte la mesure des transitions d'un point à un point différent. Dans l'expression ci-dessous, le coefficient de la pseudonorme de  $M' - M$  peut s'interpréter comme la norme uniforme du gradient de  $V$  associé aux transitions permises par  $M$  et  $M'$ .

**Lemme 1.6** *On a*

$$(\beta^{-1} - 1) \sup W \leq \sup(c' - c) + \|M' - M\|_* \sup_{i,j} \{|V_j - V_i|; |M'_{ij}| + |M_{ij}| > 0\}. \quad (1.31)$$

**Proof.** Puisque  $M$  est une matrice stochastique, on a

$$(MV)_i = V_i + \sum_{j \neq i} M_{ij}(V_j - V_i). \quad (1.32)$$

Combinant avec (1.25), il vient

$$\begin{aligned} \beta^{-1}W_i &\leq \sup_u \left( c'_i(u) - c_i(u) + \sum_j M'_{ij}W_j + \sum_j (M'_{ij} - M_{ij})V_j \right) \\ &\leq \sup(c' - c) + \sup W + \sum_{j \neq i} (M'_{ij} - M_{ij})(V_j - V_i). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Prenant le supremum en  $i$  à droite puis à gauche, on obtient le résultat.  $\blacksquare$

**Exemple 1.7** Soit  $L_V := \sup_i \{|V_{i+1} - V_i|\}$  la constante de Lipschitz de  $V$ . Si  $M_{ij} = M'_{ij} = 0$  quand  $|j - i| > q$ , alors (1.31) implique

$$(\beta^{-1} - 1) \sup W \leq \sup(c' - c) + qL_V \|M' - M\|_*. \quad (1.34)$$

En particulier, si l'espace d'état est  $\mathbb{Z}$ , notons

$$L_M := \sup_i \sum_{j \neq i} |M_{i+1, j+1} - M_{ij}| \quad (1.35)$$

la constante de Lipschitz de la partie non diagonale de  $M$  pour la norme uniforme). Pour tous  $i$  et  $j$ , prenons  $c'_i = c_{i+1}$  et  $M'_{ij} := M_{i+1, j+1}$ . Alors  $V'_i = V_{i+1}$  pour tout  $i$ , donc (1.34) implique

$$(\beta^{-1} - 1) \sup_i (V_{i+1} - V_i) \leq \sup_i (c_{i+1} - c_i) + qL_V L_M. \quad (1.36)$$

Avec l'estimation symétrique obtenue en décalant de  $-1$  au lieu de  $+1$ , et utilisant  $\|W\|_\infty = L_V$ , il vient  $(\beta^{-1} - 1 - qL_M)L_V \leq L_c$ . Si  $\beta^{-1} > qL_M + 1$ , ceci fournit une estimation de la constante de Lipschitz de  $V$  :

$$L_V \leq \frac{L_c}{\beta^{-1} - 1 - qL_M}. \quad (1.37)$$

On appliquera ce résultat à l'analyse des méthodes de différences finies dans la proposition 2.5.

### 1.2.3 Algorithmes numériques

Dans le cas de problèmes avec horizon infini, on peut mettre en œuvre un algorithme itératif de calcul de  $v$  à partir du principe de programmation dynamique. La méthode la plus simple est l'*itérations sur les valeurs*

$$v_i^{q+1} = \beta \inf_{u_i \in U_i} \left\{ c_i(u_i) + \sum_j M_{ij}(u_i) v_j^q \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (1.38)$$

Ici  $(v^q)_{q \in \mathbb{N}}$  (à ne pas confondre avec la notation  $v^k$  employée dans le cas de l'horizon fini) représente la suite formée par l'algorithme.

**Proposition 1.8** *L'algorithme d'itération sur les valeurs converge vers la solution unique  $v^*$  de (1.19), et on a*

$$\|v^q - v^*\|_\infty \leq \beta^q \|v^0 - v^*\|_\infty. \quad (1.39)$$

**Proof.** Soit  $T$  l'opérateur construit en (1.23). Nous avons montré (démonstration du théorème 1.5) que  $T$  est contractant de rapport  $\beta$  dans la norme du max. L'algorithme d'itération sur les valeurs s'écrit  $v^q = Tv^{q-1}$ . On conclut avec le lemme 1.2. ■

Dans le cas assez fréquent où  $\beta$  est proche de 1, l'algorithme d'itération sur les valeurs peut être très lent. Une alternative intéressante est l'algorithme d'itérations sur les stratégies, ou *algorithme de Howard*. On supposera (1.22) satisfait. Chaque itération de l'algorithme comporte deux étapes :

- Etant donné une stratégie  $u^q \in \mathcal{U}$ , calculer la valeur  $v^q$  associée, solution de l'équation linéaire

$$v^q = \beta(c(u^q) + M(u^q)v^q). \quad (1.40)$$

- Calculer  $u^{q+1}$  solution de

$$u_i^{q+1} \in \arg \min_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u)v_j^q \right\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.41)$$

**Proposition 1.9** *On suppose (1.22) satisfait. Alors l'algorithme d'itérations sur les stratégies, initialisé avec une stratégie  $u^0 \in \mathcal{U}$  quelconque, a les propriétés suivantes :*

- (i) *Il est bien défini,*
- (ii) *La suite  $v^q$  décroît,*
- (iii) *Elle vérifie  $\|v^{q+1} - v^*\| \leq \beta\|v^q - v^*\|$ , où  $v^*$  est la fonction valeur, unique solution du principe de programmation dynamique (1.19).*

**Proof.** (i) Vérifions que l'algorithme est bien défini. Le système linéaire (1.40) a une solution unique, car c'est l'équation de point fixe d'un opérateur contractant (lemme 1.2). Utilisant les arguments de la démonstration du théorème 1.5, on vérifie que le minimum dans la seconde étape est atteint en raison de (1.22).

Par ailleurs, la suite  $v^q$  est bornée dans  $\ell^\infty$  car la relation

$$\|v^q\|_\infty \leq \beta(\|c(u^q)\|_\infty + \|M(u^q)v^q\|_\infty) \leq \beta(\|c(u^q)\|_\infty + \|v^q\|_\infty)$$

donne l'estimation  $\|v^q\|_\infty \leq (1 - \beta)^{-1}\beta\|c\|_\infty$ .

- (ii) Les relations (1.40) et (1.41) impliquent

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(v^{q+1} - v^q) &= c(u^{q+1}) + M(u^{q+1})v^{q+1} - c(u^q) - M(u^q)v^q, \\ &\leq c(u^{q+1}) + M(u^{q+1})v^{q+1} - c(u^{q+1}) - M(u^{q+1})v^q, \\ &= M(u^{q+1})(v^{q+1} - v^q), \end{aligned}$$

et donc  $v^{q+1} - v^q \leq 0$  d'après le lemme 1.3.

(iii) Notons  $\bar{v}^{q+1}$  la valeur calculée à partir de  $v^q$ , par l'itération sur les valeurs. On sait que  $\|\bar{v}^{q+1} - v^*\| \leq \beta\|v^q - v^*\|$ . Puisque  $v^* \leq v^{q+1}$ , il suffit d'établir que  $v^{q+1} \leq \bar{v}^{q+1}$ . Or

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(v^{q+1} - \bar{v}^{q+1}) &= c(u^{q+1}) + M(u^{q+1})v^{q+1} - (c(u^{q+1}) + M(u^{q+1})v^q), \\ &= M(u^{q+1})(v^{q+1} - v^q). \end{aligned}$$

D'après le point (ii),  $v^{q+1} \leq v^q$ ; donc  $v^{q+1} \leq \bar{v}^{q+1}$ . ■

**Remarque 1.10** La démonstration précédente montre que l'itération sur les stratégies converge au moins aussi vite que l'itération sur les valeurs.

## 1.3 Extensions

### 1.3.1 Problèmes de temps de sortie

Soit  $\Omega$  une partie de  $\{1, \dots, m\}$ , et considérons une chaîne de Markov (sans commande) de matrice de transition  $M$ . Soit  $\tau$  le premier instant de sortie (aléatoire) de  $\Omega$  :

$$\tau := \min\{k \in \mathbb{N}; x^k \notin \Omega\}. \quad (1.42)$$

On considère la fonction valeur, où  $i \in \{1, \dots, m\}$  :

$$V_i := \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^{k+1} c_{x^k} + \beta^\tau \varphi_{x^\tau} | x^0 = i \right). \quad (1.43)$$

**Proposition 1.11** *On suppose  $c$  et  $\varphi$  dans  $\ell^\infty$ . Alors l'espérance ci-dessus est bien définie, la fonction valeur du problème de temps de sortie appartient aussi à  $\ell^\infty$ , et est solution unique de l'équation*

$$\begin{cases} v_i = \beta \left( c_i + \sum_j M_{ij} v_j \right), & i \in \Omega, \\ v_i = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.44)$$

**Proof.** Elle est similaire à celle des propositions précédentes. ■

Considérons maintenant le cas de la chaîne de Markov commandée de probabilité de transition  $M_{ij}(u)$ , avec  $u \in U_i$ , ensemble métrique compact, et les fonctions  $c_i(u)$  et  $M_{ij}(u)$  continues. On considère le problème de minimisation du critère avec temps de sortie

$$V_i := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^{k+1} c(u)_{x^k} + \beta^\tau \varphi_{x^\tau} | x^0 = i \right\}, \quad (1.45)$$

dans le cas de l'observation complète.

**Remarque 1.12** Si  $c$  est le vecteur de coordonnées toutes égales à 1, et si  $\varphi$  est nul, alors le critère s'interprète comme l'espérance du temps de sortie (actualisé). Le problème est alors dit à temps minimal.

**Proposition 1.13** *On suppose  $c$  et  $\varphi$  dans  $\ell^\infty$ . Alors la fonction valeur du problème avec temps de sortie est solution unique de l'équation de la programmation dynamique*

$$\begin{cases} v_i = \beta \inf_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j \right\}, & i \in \Omega, \\ v_i = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.46)$$

**Proof.** Elle est similaire à celle des propositions précédentes. ■

L'extension des algorithmes d'itérations sur les valeurs et sur les stratégies à la situation étudiée ici ne présente pas de difficulté.

### 1.3.2 Problèmes avec décision d'arrêt

Nous étudions un problème de commande similaire à celui de la section précédente, ajoutant la possibilité d'arrêt à tout instant, avec un coût d'arrêt  $\psi \in \mathbb{R}^m$ .

Soit  $\Omega$  une partie de  $\{1, \dots, m\}$ , et soient une chaîne de Markov commandée de matrice de transition  $M_{ij}(u)$ , avec  $u \in U_i$ , ensemble métrique compact, et les fonctions  $c(u)$  et  $M_{ij}(u)$  continues. On note  $\tau$  le premier instant de sortie de  $\Omega$ , et  $\theta$  l'instant de décision d'arrêt. Posons

$$\chi_{\theta < \tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < \tau, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et adoptons une convention similaire pour  $\chi_{\theta \geq \tau}$ . On considère le problème de minimisation du critère avec temps d'arrêt

$$V_i := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\theta \wedge \tau - 1} \beta^{k+1} c(u)_{x^k} + \beta^\theta \chi_{\theta < \tau} \psi_{x^\theta} + \beta^\tau \chi_{\theta \geq \tau} \varphi_{x^\tau} \mid x^0 = i \right\}, \quad (1.47)$$

dans le cas de l'observation complète.

**Remarque 1.14** Le cadre de cette section recouvre plusieurs situations intéressantes : (i) ensemble  $\Omega$  égal à l'espace d'état, (ii)  $U_i$  réduit à un point pour tout  $i$  : la seule décision est d'arrêter ou non, (iii) stratégie optimale pouvant être de ne jamais arrêter le jeu.

**Théorème 1.15** *On suppose  $\sup_{u \in U} |c_i(u)|$  fini et  $\psi$  et  $\varphi$  borné. Alors la fonction valeur  $v$  du problème de temps d'arrêt est solution unique du système*

$$\begin{cases} \text{(i)} & v_i = \min \left( \beta \inf_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j \right\}, \psi_i \right), & i \in \Omega, \\ \text{(ii)} & v_i = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.48)$$

**Proof.** La démonstration est similaire à celle des sections précédentes ; contentons-nous de démontrer que l'équation (1.48) a une solution unique  $v^*$ . Définissons l'opérateur  $T$  de  $\mathbb{R}^m$  dans lui-même par

$$\begin{cases} (Tv)_i = \min \left( \beta \inf_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j \right\}, \psi_i \right), & i \in \Omega, \\ (Tv)_i = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.49)$$

Avec (1.25) on vérifie facilement que  $T$  est une contraction stricte pour la norme infinie, de rapport  $\beta$ , et a donc un unique point fixe  $v^*$ . Ceci établit l'existence et l'unicité de la solution de (1.48). ■

Les arguments qui précèdent assurent la convergence de l'*algorithme d'itérations sur les valeurs*, qui s'écrit, en reprenant les notations de (1.49),

$$v^{q+1} = T(v^q), \quad (1.50)$$

ou encore

$$\begin{cases} v_i^{q+1} = \min \left( \beta \inf_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j^q \right\}, \psi_i \right), & i \in \Omega, \\ v_i^{q+1} = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.51)$$

En ce qui concerne l'*algorithme d'itérations sur les stratégies*, on peut écrire un algorithme de principe sous la forme suivante :

1. Choisir arbitrairement la stratégie initiale  $u^0 \in \mathcal{U}$ .

Poser  $q := 0$ .

2. Etant donné une stratégie  $u^q \in \mathcal{U}$ , calculer  $v^q$  solution de

$$\begin{cases} v_i^q = \min \left( \beta \left\{ c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q) v_j^q \right\}, \psi_i \right), & i \in \Omega, \\ v_i^q = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.52)$$

3. Calculer  $u^{q+1}$  solution, pour tout  $i$ , de

$$u_i^{q+1} \in \arg \min_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j^q \right\}. \quad (1.53)$$

4.  $q := q + 1$ , aller en 2.

Nous admettons la proposition suivante, dont la démonstration, extension de celle de la proposition 1.9, utilise (1.25).

**Proposition 1.16** *L'algorithme ci-dessus, initialisé avec une stratégie  $u^0 \in \mathcal{U}$  quelconque, est bien défini, et forme une suite de valeurs  $v^q$  décroissante, et qui vérifie  $\|v^{q+1} - v^*\| \leq \beta \|v^q - v^*\|$ , où  $v^*$  est solution unique de (1.48).*

### 1.3.3 Un algorithme implémentable

L'algorithme d'itérations sur les stratégies que nous venons de présenter nécessite à chaque itération la résolution de l'équation non linéaire (1.52), ce qui peut être très coûteux. Nous allons formuler un autre algorithme, itérant sur les stratégies, dans lequel on ne résout qu'une équation linéaire à chaque itération. L'idée est de calculer  $v^q$  solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} v_i^q = \beta \left( c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q) v_j^q \right), & i \in I^q, \\ v_i^q = \psi_i, & i \in \Omega \setminus I^q, \\ v_i^q = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.54)$$



L'ensemble  $I^q$ , inclus dans  $\Omega$ , est une prédiction des états  $i$  pour lesquels l'inégalité  $v_i \leq \psi_i$  n'est pas active à l'optimum. Ceci conduit à l'algorithme suivant :

1. **Initialisation** Choisir arbitrairement la stratégie initiale  $u^0 \in \mathcal{U}$ .  
Calculer  $\hat{v}^0$  solution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \hat{v}_i^0 = \beta \left( c_i(u_i^0) + \sum_j M_{ij}(u_i^0) \hat{v}_j^0 \right), & i \in \Omega, \\ \hat{v}_i^0 = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.55)$$

Calculer  $v^0$  comme suit :

$$\begin{cases} v_i^0 = \min(\hat{v}_i^0, \psi_i), & i \in \Omega, \\ v_i^0 = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.56)$$

Poser  $q := 0$  et

$$I^0 := \{i \in \Omega; v_i^0 < \psi_i\}. \quad (1.57)$$

2. **Boucle** Faire  $q := q + 1$ . Calculer  $u^q$  solution de

$$u_i^q \in \arg \min_{u \in U_i} \left\{ c_i(u) + \sum_j M_{ij}(u) v_j^{q-1} \right\}, \quad i \in \Omega. \quad (1.58)$$

Poser

$$I^q := I^{q-1} \cup \left\{ i \in \Omega; \beta \left( c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q) v_j^{q-1} \right) < \psi_i \right\}. \quad (1.59)$$

Calculer  $v^q$ , solution de l'équation linéaire (1.54).

**Fin de Boucle** (retour en 2).

**Proposition 1.17** *L'algorithme ci-dessus forme une suite de valeurs  $v^q$  décroissant vers la solution unique  $v^*$  de (1.48).*

**Proof.** a) Montrons la décroissance de  $v^q$ . S'il n'en est pas ainsi, soient  $q \in \mathbb{N}$  et  $i \in \Omega$  tels que  $v_i^{q+1} - v_i^q > 0$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$ , on peut supposer que  $(v^{q+1} - v^q)_i \geq \sup_j (v^{q+1} - v^q)_j - \varepsilon$ . Par ailleurs,  $i \in I^{q+1}$  (sinon  $v_i^{q+1}$  et  $v_i^q$  seraient égaux à  $\psi_i$ ). Donc

$$v_i^{q+1} = \beta \left( c_i(u_i^{q+1}) + \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1}) v_j^{q+1} \right). \quad (1.60)$$

Posons  $w := v^{q+1} - v^q$ , et distinguons deux cas. Si  $i \in I^q$ , alors

$$v_i^q = \beta \left( c_i(u_i^q) + \sum_j M_{ij}(u_i^q) v_j^q \right), \quad (1.61)$$

et donc avec (1.58)

$$\begin{aligned} w_i &= \beta \left( c_i(u_i^{q+1}) + \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})v_j^{q+1} - c_i(u_i^q) - \sum_j M_{ij}(u_i^q)v_j^q \right), \\ &\leq \beta \left( \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})w_j \right) \leq \beta(w_i + \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.62)$$

ce qui donne la contradiction recherchée pour  $\varepsilon > 0$  assez petit.

Si, au contraire,  $i \notin I^q$ , alors  $v_i^q = \psi_i$  et, par définition de  $I^{q+1}$ , on a

$$\beta \left( c_i(u_i^{q+1}) + \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})v_j^q \right) < \psi_i = v_i^q. \quad (1.63)$$

Donc

$$\begin{aligned} w_i &= \beta \left( c_i(u_i^{q+1}) + \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})v_j^{q+1} \right) - \psi_i, \\ &\leq \beta \left( c_i(u_i^{q+1}) + \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})v_j^{q+1} - c_i(u_i^{q+1}) - \sum_j M_{ij}(u_i^{q+1})v_j^q \right), \end{aligned} \quad (1.64)$$

ce qui permet de conclure de la même manière.

b) On peut montrer, par des arguments déjà employés, que la suite  $v^q$  est bornée. Puisqu'elle est décroissante, elle converge vers une valeur  $\hat{v}$ . De même,  $I^q$  étant croissant, converge vers un certain  $I^*$ . Enfin par compacité on a la convergence de  $u^q$  vers  $\hat{u} \in \mathcal{U}$  pour une sous suite. Passant à la limite dans (1.54)<sup>1</sup>, il vient

$$\begin{cases} \hat{v}_i = \beta \left( c_i(\hat{u}_i) + \sum_j M_{ij}(\hat{u}_i)\hat{v}_j \right), & i \in I^*, \\ \hat{v}_i = \psi_i, & i \in \Omega \setminus I^*, \\ \hat{v}_i = \varphi_i, & i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.65)$$

De plus la décroissance de  $v^q$  implique

$$\hat{v}_i \leq \psi_i, \quad i \in I^*, \quad (1.66)$$

et le passage à la limite dans (1.59) donne

$$\beta \left( c_i(\hat{u}_i) + \sum_j M_{ij}(\hat{u}_i)\hat{v}_j \right) \geq \psi_i, \quad i \in \Omega \setminus I^*. \quad (1.67)$$

Les trois relations ci-dessus impliquent que  $\hat{v}$  est solution de (1.48), donc est égale à la fonction valeur  $v$ . ■

Notons que l'algorithme présenté dans cette section peut s'avérer lent si la mise à jour de l'ensemble  $I^q$  n'est pas assez efficace. On peut y remédier, soit en introduisant quelques itérations sur les valeurs (peu coûteuses, comparées à la résolution du système (1.55)), soit en s'inspirant des algorithmes de résolution de problèmes de complémentarité linéaire, par exemple ceux basés sur les points intérieurs.

<sup>1</sup>Par des arguments similaires à ceux employés dans la démonstration du théorème 1.5(iii).

## 1.4 Notes

La référence historique est Bellman [6]. Bertsekas [7] est une bonne première lecture sur le sujet.

On trouvera de nombreuses extensions (contrôle ergodique, agrégation, décomposition) dans Kushner et Dupuis [28], Quadrat et Viot [33]. Le cas de problèmes avec contraintes en espérance est traité dans Tidball et al. [35], Altman [2] et Feinberg et Shwartz [21]. On consultera aussi Hernández-Lerma et Lasserre [24].

Si la seule décision est le temps d'arrêt, le principe de programmation dynamique est un problème de complémentarité linéaire, sujet sur lequel nous renvoyons à Cottle et al. [17]. Ceci suggère de s'inspirer des algorithmes de résolution de problèmes de complémentarité linéaire pour résoudre des problèmes de commande optimale de chaînes de Markov.



## Chapitre 2

# Problèmes en temps et espace continus 22 07 09

### 2.1 Approche informelle de l'équation HJB

#### 2.1.1 Position du problème

Etudions le problème de commande optimale stochastique

$$(P_x) \quad \begin{cases} \text{Min } \mathbb{E} \int_0^\infty \ell(y(t), u(t)) e^{-\lambda t} dt; \\ dy(t) = f(y(t), u(t)) dt + \sigma(y(t), u(t)) dw(t), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, \infty[, \\ y_0 = x. \end{cases}$$

Les données de ce problème sont le taux d'actualisation  $\lambda > 0$ , les fonctions *coût*  $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , *tendance*  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et *volatilité*  $\sigma(\cdot, \cdot)$ , application de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  vers l'espace des matrices de taille  $n \times r$ , et l'ensemble des commandes admissibles  $U$ , partie compacte de  $\mathbb{R}^m$ . On a noté  $w(t)$  un brownien standard de dimension  $r$ . On suppose dans la suite  $\ell$ ,  $f$  et  $\sigma$  lipschitziens et bornés.

Rappelons qu'un mouvement brownien standard (scalaire) sur l'intervalle de temps  $\mathbb{R}_+$  est une variable aléatoire  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dont les trajectoires sont presque sûrement continues, et telle que (i) ses accroissements sont indépendants, (ii)  $w(0)$  est nul, et (iii) si  $0 \leq s \leq t < \infty$ , alors  $w(t) - w(s)$  est gaussien de moyenne nulle et variance  $t - s$ . Un brownien standard de dimension  $r$  est un vecteur aléatoire dont les composantes sont des mouvements brownien standard scalaires indépendants.

L'étude de ce problème comporte deux phases : l'analyse mathématique, qui conduit à une équation HJB avec un opérateur différentiel du second ordre, et l'analyse numérique de cette équation HJB. Nous allons commencer par présenter une version en temps discret du problème, qui permettra une dérivation formelle de l'équation HJB.

### 2.1.2 Problème discrétisé en temps

Soit  $h_0 > 0$  le pas de temps. Considérons le problème de commande optimale stochastique en temps discret et espace continu :

$$(P_x^{h_0}) \quad \begin{cases} \text{Min } \mathbb{E} \left\{ h_0 \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda h_0)^{-k-1} \ell(y_k, u_k) \right\}; \\ y_{k+1} = y_k + h_0 f(y_k, u_k) + \sqrt{h_0} \sigma(y_k, u_k) \delta w_k, \quad u_k \in U, \quad k \in \mathbb{N}; \\ y_0 = x. \end{cases}$$

Ici  $\delta w_k \in \mathbb{R}^r$  est un vecteur aléatoire dont les coordonnées sont des tirages indépendants de  $\pm 1$  avec probabilités égales, donc de moyenne nulle et variance unité. Le terme  $\sqrt{h_0}$  fait que, pour  $h_0$  assez petit, si la  $i$ ème ligne de  $\sigma(y_k, u_k)$  n'est pas nulle, alors l'essentiel de la variation de la  $i$ ème composante de l'état est due au bruit. Par ailleurs si  $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $s = k_0 h_0$  et  $t = k_1 h_0$ , alors  $\sum_{k=k_0}^{k_1-1} \delta w_k$  est une variable asymptotiquement gaussienne, de moyenne nulle et variance  $t - s$ , ce qui est cohérent avec le problème continu.

A la différence du cas déterministe, il faut préciser quelle information est disponible quand on prend la décision  $u^k$  à l'instant  $k$ . Par exemple, si les tirages sont connus d'avance, on se retrouve dans une situation déterministe. En général le tirage  $\delta w_k$  n'est pas déterminé jusqu'à l'instant  $k + 1$ ; l'information sur ce tirage et sur l'état  $y_k$  peut être totale, partielle ou nulle. Il y a donc une variété de situations possibles.

Dans la suite nous supposons que la décision  $u_k$  se fait en connaissant l'état  $y_k$ , mais pas les tirages  $\delta w_i$ , pour  $i \geq k$  : c'est le cas dit de l'*observation complète*. Compte tenu de l'invariance en temps du problème, ceci conduit à chercher une commande sous forme de retour d'état (feedback). Autrement dit l'ensemble  $\mathcal{U}$  des commandes admissibles est celui des applications  $u = u(y)$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $U$ . A  $u \in \mathcal{U}$  est associé un coût  $\mathcal{V}^{h_0}(x, u)$  vérifiant la relation suivante (noter que l'espérance ci-dessous se réduit à la somme de  $2^r$  termes)

$$\mathcal{V}^{h_0}(x, u) = (1 + \lambda h_0)^{-1} \left( h_0 \ell(x, u) + \mathbb{E} \left( \mathcal{V}^{h_0}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma(x, u) \delta w_0, u) \right) \right). \quad (2.1)$$

On pose  $V^{h_0}(x) := \inf_{u \in U} \mathcal{V}^{h_0}(x, u)$ . Le *principe de programmation dynamique* s'écrit

$$V^{h_0}(x) = (1 + \lambda h_0)^{-1} \inf_{u \in U} \left\{ h_0 \ell(x, u) + \mathbb{E} \left( V^{h_0}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma(x, u) \delta w_0) \right) \right\}. \quad (2.2)$$

Supposons  $V^{h_0}$  de classe  $C^2$ , et de dérivée seconde uniformément bornée sur  $\mathbb{R}^n$ , uniformément par rapport à  $h_0$  assez petit. Alors

$$\begin{aligned} \Delta &:= V^{h_0}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma(x, u) \delta w_0), \\ &= V^{h_0}(x) + h_0 D V^{h_0}(x) f(x, u) + \sqrt{h_0} D V^{h_0}(x) \sigma(x, u) \delta w_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} h_0 D^2 V^{h_0}(x) (\sigma(x, u) \delta w_0, \sigma(x, u) \delta w_0) + o(h_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si  $A$  est une matrice  $n \times n$  et  $z \in \mathbb{R}^n$ , on a  $z^T A z = \text{trace } A z z^T$ . Utilisant cette relation, il vient

$$D^2 V^{h_0}(x) (\sigma(x, u) \delta w_0, \sigma(x, u) \delta w_0) = \text{trace} \left( D^2 V^{h_0}(x) \sigma(x, u) \delta w_0 \delta w_0^T \sigma(x, u)^T \right). \quad (2.4)$$

Notons

$$a(x, u) := \frac{1}{2}\sigma(x, u)\sigma(x, u)^T. \quad (2.5)$$

La matrice  $n \times n$   $a(x, u)$  est symétrique et semi définie positive ; elle est proportionnelle à la covariances des bruits sur la dynamique et nous l'appellerons *matrice de covariance*. Puisque  $\delta w$  est de moyenne nulle et variance unité, on a, avec les relations précédentes :

$$\mathbb{E}(\Delta) = V^{h_0}(x) + h_0 DV^{h_0}(x)f(x, u) + h_0 \text{trace} \left( D^2V^{h_0}(x)a(x, u) \right) + o(h_0). \quad (2.6)$$

**Définition 2.1** On définit l'opérateur "rond" noté  $\circ$ , appliqué à deux matrices  $A$  et  $B$  de même taille, par  $A \circ B := \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij} = \text{trace}(AB^T)$ . Cette opération est le produit scalaire associé à la norme de Frobénius  $\|A\|_F := (\sum_{i,j} A_{ij}^2)^{1/2}$ . Si  $A$  est carrée de taille  $n$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $A \circ (xx^T) = x^T Ax$ .

Passant à la limite quand  $h_0 \downarrow 0$ , on obtient formellement l'équation HJB du problème en temps continu :

$$\lambda V(x) = \inf_{u \in U} \{ \ell(x, u) + f(x, u) \cdot DV(x) + a(x, u) \circ D^2V(x) \}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Lorsque  $\sigma(x, u)$  est identiquement nul, on obtient l'équation HJB de la commande optimale déterministe, qui est du premier ordre.

On obtient un résultat similaire dans le cas d'un problème avec horizon fini  $T$  et coût final  $\varphi$  :

$$(P_{t,x}) \quad \begin{cases} \text{Min } \mathbb{E} \left( \int_0^T \ell(t, y(t), u(t)) dt + \varphi(y(T)) \right); \\ dy(t) = f(t, y(t), u(t)) dt + \sigma(t, y(t), u(t)) dw, \quad u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \\ y_0 = x. \end{cases}$$

de valeur notée  $V(t, x)$ . Une discussion analogue à celle de l'horizon infini permet d'obtenir une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman du problème continu :

$$\begin{aligned} -D_t V(t, x) &= \inf_{u \in U} \{ \ell(t, x, u) + f(t, x, u) \cdot DV(t, x) + a(t, x, u) \circ D^2V(t, x) \}, \\ &\quad (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}^n, \\ V(T, x) &= \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous allons étudier la résolution numérique de l'équation HJB (2.7) par des schémas aux différences finies, en commençant par le cas d'un état scalaire.

## 2.2 Schémas de différences finies

### 2.2.1 Schémas monotones : dimension 1

On note  $h_0, h_1$ , etc les pas de discrétisation en temps et suivants les variables d'espace  $x_1$ , etc. Nous discutons les schémas de résolution numérique de l'équation HJB (2.7) du

problème de commande optimale stochastique à horizon infini, en dimension un, avec centrage du terme du second ordre, et décentrage pour le terme du premier ordre. On décentre à droite si la tendance  $f$  est positive, et à gauche sinon, ce qui revient à utiliser dans le schéma le point vers lequel pointe la tendance. Le schéma décentré s'écrit alors

$$\lambda v_j = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x_j, u) + f(x_j, u)_+ \frac{v_{j+1} - v_j}{h_1} + |f(x_j, u)_-| \frac{v_{j-1} - v_j}{h_1} + a(x_j, u) \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h_1^2} \right\}. \quad (2.9)$$

Introduisons un *pas de temps fictif*  $h_0 > 0$ , par lequel on multiplie l'équation ci-dessus. Ajoutant  $v_j$  à chaque membre, et ordonnant les expressions suivant  $v_{j-1}$ ,  $v_j$  et  $v_{j+1}$ , on obtient l'expression équivalente

$$v_j := (1 + \lambda h_0)^{-1} \inf_{u \in U} \left\{ h_0 \ell(x_j, u) + \left( 1 - \frac{h_0}{h_1} |f(x_j, u)| - 2 \frac{h_0}{h_1^2} a(x_j, u) \right) v_j + \left( \frac{h_0}{h_1} |f(x_j, u)_-| + \frac{h_0}{h_1^2} a(x_j, u) \right) v_{j-1} + \left( \frac{h_0}{h_1} f(x_j, u)_+ + \frac{h_0}{h_1^2} a(x_j, u) \right) v_{j+1} \right\}. \quad (2.10)$$

On pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{(x,u) \in \mathbb{R} \times U} |f(x, u)|; \quad \|a\|_\infty := \sup_{(x,u) \in \mathbb{R} \times U} |a(x, u)|. \quad (2.11)$$

**Proposition 2.2** (i) *Le schéma (2.9) possède une solution unique, telle que*

$$\|v\|_\infty \leq \lambda^{-1} \|\ell\|_\infty. \quad (2.12)$$

(ii) *Si  $h_0$  vérifie la condition de stabilité*

$$\frac{h_0}{h_1} \|f\|_\infty + \frac{2h_0}{h_1^2} \|a\|_\infty^2 \leq 1, \quad (2.13)$$

alors (2.10) est une équation de point fixe contractant pour la norme uniforme, de rapport de contraction  $(1 + \lambda h_0)^{-1}$ .

**Proof.** La condition de stabilité assure que, dans la formule (2.10), les poids de  $v_j$  et  $v_{j\pm 1}$  sont positifs. De plus la somme de ces poids vaut 1. On peut donc interpréter cette équation comme le principe de programmation dynamique (1.19) de la commande optimale d'une chaîne de Markov, avec ici  $\beta = (1 + \lambda h_0)^{-1}$ , et  $\|c\|_\infty \leq h_0 \|\ell\|_\infty$ , donc  $\beta(1 - \beta)^{-1} \|c\|_\infty \leq \lambda^{-1} \|\ell\|_\infty$ . On conclut avec le théorème 1.5. ■

**Remarque 2.3** Le terme dominant dans la condition de stabilité est lié à  $f$  si  $h_1$  est grand par rapport à  $2\|a\|_\infty/\|f\|_\infty$  (discrétisation spatiale grossière), et au terme de diffusion si  $h_1$  est petit par rapport à  $2\|a\|_\infty/\|f\|_\infty$  (discrétisation spatiale fine). Dans ce dernier cas, le pas de temps maximum respectant la condition de stabilité est de l'ordre de  $\frac{1}{2} h_1^2 / \|a\|_\infty$ , donc beaucoup plus petit que dans le cas déterministe (où il vaut  $h_1 / \|f\|_\infty$ ).

**Remarque 2.4** On trouvera une analyse d'erreur du schéma centré en section 3.2.2.



En vue de l'analyse de convergence il est utile de disposer, quand c'est possible, d'une estimation de type Lipschitz. On dira que la solution  $v$  du schéma est lipschitienne de constante  $L$ , si  $L := (h_1)^{-1} \sup_j |v_{j+1} - v_j|$  est finie.

**Proposition 2.5** *Si  $\lambda > L_f + 2L_a/h_1$ , la solution du schéma est lipschitienne de constante*

$$L_{h_1} \leq (\lambda - L_f - 2L_a/h_1)^{-1} L_\ell. \quad (2.14)$$

*En particulier, quand  $\sigma$  ne dépend pas de  $x$ , si  $\lambda > L_f$ , la solution du schéma est uniformément lipschitienne, de constante  $(\lambda - L_f)^{-1} L_\ell$ .*

**Proof.** On applique le résultat (1.37) de l'exemple 1.7, avec ici  $\beta = (1 + h_0\lambda)^{-1}$ , donc  $\beta^{-1} - 1 = h_0\lambda$ , et  $L_c = h_0L_\ell$ . De plus, utilisant

$$|\alpha_+ - \beta_+| + |\alpha_- - \beta_-| \leq |\alpha - \beta|, \quad (2.15)$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} |M'_{ij} - M_{ij}| &\leq \frac{h_0}{h_1} \sup_u (|f(x_{i+1}, u)_+ - f(x_i, u)_+| \\ &\quad + |f(x_{i+1}, u)_- - f(x_i, u)_-| + 2h_1^{-1} |a(x_{i+1}, u) - a(x_i, u)|) \\ &\leq h_0(L_f + 2L_a/h_1), \end{aligned} \quad (2.16)$$

d'où le résultat. ■

L'étude de la convergence de ce schéma étant complexe, elle est reportée au chapitre suivant.

Dans le cas de dimension d'espace supérieure à 1, on sait seulement donner des réponses *partielles* au problème de formulation d'un schéma de différence finie consistant et monotone pour l'équation HJB. Nous allons poser le problème et établir quelques résultats.

### 2.2.2 Différences finies classiques

Abordons l'étude de discrétisation de l'équation HJB, pour le cas de la dimension d'espace  $n > 1$ , par des schémas de différences finies. Notons  $D_i$  les dérivées par rapport à  $x_i$ , et on adopte le même type de convention pour les dérivées d'ordre supérieur. Pour approximer  $D_{ii}$  on utilise encore la formule centrée

$$D_{ii}^2 v_j \approx \frac{v_{j+e_i} - 2v_j + v_{j-e_i}}{h_i^2}.$$

Pour alléger les formules il convient de noter  $\delta_{\pm i}$ ,  $\delta_{\pm, i \pm k}$ , etc les opérateurs de translation de  $\pm$  une coordonnée dans la direction  $i$ ,  $k$ , etc ; ainsi

$$\delta_i v_j = v_{j+e_i}, \quad \delta_{i, -k} v_j = v_{j+e_i - e_k}.$$

Avec cette notation l'approximation de  $D_{ii}$  est

$$D_{ii}^2 \approx \frac{\delta_i - 2\delta_0 + \delta_{-i}}{h_i^2}.$$

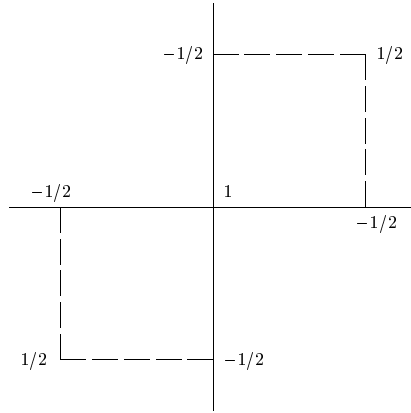


FIG. 2.1 – Poids de l'approximation de  $D_{ij}^2$  : cas où  $a_{ij} > 0$

Pour le calcul des dérivées croisées ( $i \neq j$ ), plusieurs choix sont possibles. Par exemple, utilisant le développement, pour  $\Phi$  régulier,

$$\Phi(x + h_i e_i + h_k e_k) = \Phi(x) + D\Phi(x)(h_i e_i + h_k e_k) + \frac{1}{2} D^2 \Phi(x)((h_i e_i + h_k e_k), (h_i e_i + h_k e_k)) + o(h_i^2 + h_k^2), \quad (2.17)$$

et procédant de même pour  $\Phi(x + h_i e_i)$  et  $\Phi(x + h_k e_k)$ , on déduit le choix

$$D_{ik}^2 \approx \frac{\delta_{i,k} + \delta_0 - \delta_i - \delta_k}{h_i h_k},$$

qui fait intervenir les quatre points du “rectangle en haut à droite”. On peut écrire une formule similaire faisant intervenir les points du rectangle opposé :

$$D_{ik}^2 \approx \frac{\delta_{-i,-k} + \delta_0 - \delta_{-i} - \delta_{-k}}{h_i h_k}.$$

Il est utile de centrer l'estimation en prenant la moyenne des deux, ce qui donne

$$D_{ik}^2 \approx \frac{\delta_{i,k} + \delta_{-i,-k} + 2\delta_0 - \delta_i - \delta_k - \delta_{-i} - \delta_{-k}}{2h_i h_k}. \quad (2.18)$$

Mais on peut aussi bien faire intervenir les estimations basées sur les deux autres rectangles :

$$D_{ik}^2 \approx \frac{\delta_i + \delta_k + \delta_{-i} + \delta_{-k} - \delta_{i,-k} - \delta_{-i,k} - 2\delta_0}{2h_i h_k}. \quad (2.19)$$

Le point important est que ces deux formules font apparaître les points  $\delta_{\pm i, \pm k}$  avec des poids positifs dans le premier cas, et négatifs dans le second. Soit  $\hat{D}^{x,u}$  la matrice  $n \times n$  d'opérateurs aux différences définie par

$$\hat{D}_{ik}^{x,u} = \begin{cases} \frac{\delta_i - 2\delta_0 + \delta_{-i}}{h_i^2} & \text{si } i = k, \\ \frac{\delta_{i,k} + \delta_{-i,-k} + 2\delta_0 - \delta_i - \delta_k - \delta_{-i} - \delta_{-k}}{2h_i h_k} & \text{si } a_{ik}(x, u) \geq 0, \\ \frac{\delta_i + \delta_k + \delta_{-i} + \delta_{-k} - \delta_{i,-k} - \delta_{-i,k} - 2\delta_0}{2h_i h_k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les termes du premier ordre, on reprend le principe du décentrage suivant le signe de la tendance, mais pour chaque composante ; à  $(x, u)$ , associons  $D_i^{\eta(x_j, u)} \in \mathbb{R}^n$  défini par

$$D_i^{\eta(x_j, u)} = \begin{cases} \frac{v_{j+e_i} - v_j}{h_i} & \text{si } f_i(x, u) \geq 0, \\ \frac{v_j - v_{j-e_i}}{h_i} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Considérons le schéma discret

$$\lambda v_j = \min_{u \in U} \left\{ \ell(x_j, u) + f(x_j, u) \cdot D^{\eta(x_j, u)} v_j + \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x_j, u) \hat{D}_{ik}^{x,u} v_j \right\}. \quad (2.21)$$

Multipliant l'équation par un pas de temps fictif  $h_0$ , ajoutant  $v_j$  à chaque membre, et réordonnant les expressions, il vient

$$\begin{aligned} \lambda v_j = \min_{u \in U} & \left\{ h_0 \ell(x_j, u) \right. \\ & + \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{h_0}{h_i} |f_i(x_j, u)| - 2 \sum_{i=1}^n \frac{h_0}{h_i^2} |a_{ii}(x_j, u)| + \sum_{i \neq k} \frac{h_0}{h_i h_k} |a_{ik}(x_j, u)| \right) v_j \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_0}{h_i} |f_i(x_j, u)| + \frac{h_0}{h_i^2} a_{ii}(x_j, u) - \sum_{k \neq i} \frac{h_0}{h_i h_k} |a_{ik}(x_j, u)| \right) v_{j-e_i} \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{h_0}{h_i} f_i(x_j, u)_+ + \frac{h_0}{h_i^2} a_{ii}(x_j, u) - \sum_{k \neq i} \frac{h_0}{h_i h_k} |a_{ik}(x_j, u)| \right) v_{j+e_i} \\ & \left. + \sum_{i>k} \frac{h_0}{h_i h_k} \left[ a_{ik}(x_j, u)_+ (v_{j+e_i+e_k} + v_{j-e_i-e_k}) + |a_{ik}(x_j, u)| (v_{j+e_i-e_k} + v_{j-e_i+e_k}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On peut introduire une mise à l'échelle de  $f$  et  $a$  :

$$f_i^h(x, u) := \frac{f_i(x, u)}{h_i}; \quad a_{ij}^h(x, u) := \frac{a_{ij}(x, u)}{h_i h_j}; \quad (2.23)$$

d'où l'expression équivalente

$$\begin{aligned}
v_j &= (1 + \lambda h_0)^{-1} \min_{u \in U} \left\{ h_0 \ell(x_j, u) \right. \\
&+ \left( 1 - h_0 \sum_{i=1}^n |f_i^h(x_j, u)| - 2h_0 \sum_{i=1}^n |a_{ii}^h(x_j, u)| + h^0 \sum_{i \neq k} |a_{ik}^h(x_j, u)| \right) v_j \\
&+ h_0 \sum_{i=1}^n \left( |f_i^h(x_j, u)|_- + a_{ii}^h(x_j, u) - \sum_{k \neq i} |a_{ik}^h(x_j, u)| \right) v_{j-e_i} \\
&+ h_0 \sum_{i=1}^n \left( |f_i^h(x_j, u)|_+ + a_{ii}^h(x_j, u) - \sum_{k \neq i} |a_{ik}^h(x_j, u)| \right) v_{j+e_i} \\
&+ h_0 \sum_{i>k} \left[ a_{ik}^h(x_j, u)_+ (v_{j+e_i+e_k} + v_{j-e_i-e_k}) + |a_{ik}^h(x_j, u)|_- (v_{j+e_i-e_k} + v_{j-e_i+e_k}) \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

**Proposition 2.6** *On suppose que les pas d'espace  $h_1, \dots, h_n$  sont tels que, pour tout  $(x, u) \in \mathbb{R} \times U$ , la matrice de terme général  $a_{ik}^h(x, u)$  est diagonale dominante. Alors*

(i) *Le schéma (2.21) possède une solution unique  $v$ , telle que*

$$\|v\|_\infty \leq \lambda^{-1} \|\ell\|_\infty. \tag{2.25}$$

(ii) *Si  $h_0$  vérifie la condition de stabilité*

$$h_0 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{|f_i(x_j, u)|}{h_i} + \sum_{i=1}^n \left( 2 \frac{|a_{ii}(x_j, u)|}{h_i^2} - \sum_{k \neq i} \frac{|a_{ik}(x_j, u)|}{h_i h_k} \right) \right] \leq 1, \tag{2.26}$$

*alors (2.24) est une équation de point fixe contractant pour la norme uniforme, de rapport de contraction  $(1 + \lambda h_0)^{-1}$ .*

**Proof.** La démonstration est une extension simple de celle de cas monodimensionnel (proposition 2.2). Il faut vérifier la positivité des poids des  $v_i$ . Les poids de  $v_{j \pm e_i \pm e_k}$  sont toujours positifs. La condition de diagonale dominante est nécessaire pour assurer la positivité des poids de soit  $v_{j-e_i}$ , soit  $v_{j+e_i}$ . Enfin la condition sur le pas de temps assure la positivité du poids de  $v_j$ . ■

Si la matrice  $a^h(x, u)$  n'est pas diagonale dominante, le schéma présenté ci-dessus n'est pas monotone et on peut construire des exemples pour lesquels il ne converge pas. Une solution possible est de faire intervenir davantage de points dans le schéma.

### 2.2.3 Différences finies généralisées

Dans cette approche, qui généralise la méthode usuelle de différences finies présentée dans la section précédente, le point de départ est l'approximation de la dérivée seconde de la fonction valeur suivant une direction quelconque.

Soit  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . La dérivée seconde de  $\Phi$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  dans la direction  $d \in \mathbb{R}^n$  est par définition la quantité

$$D^2\Phi(x)(d, d) = \sum_{i,k=1}^n D_{x_i x_k}^2 \Phi(x) d_i d_k.$$

Il vient avec la formule de Taylor

$$D^2\Phi(x)(d, d) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + td) - 2\Phi(x) + \Phi(x - td)}{t^2}.$$

En particulier, étant donné  $\xi \in \mathbb{Z}^n$ , notons

$$\Delta_\xi \Phi(x_j) := \Phi(x_{j+\xi}) - 2\Phi(x_j) + \Phi(x_{j-\xi}).$$

Il vient, pour tout  $j \in \mathbb{Z}^n$ ,

$$\Delta_\xi \Phi(x_j) = \sum_{i,k=1}^n h_i h_k \xi_i \xi_k D_{x_i x_k}^2 \Phi(x_j) + o(\|h\|^2). \quad (2.27)$$

Ainsi on peut approcher la courbure de  $\Phi$ , suivant une direction égale à la différence entre deux points de la grille discrète, par une combinaison des valeurs de  $\Phi$  en trois points de la grille. On peut alors se poser le problème d'approcher la partie principale (du second ordre) de l'opérateur différentiel de l'équation HJB par une combinaison de tels termes. Il s'agit de trouver des coefficients  $\alpha_{j,\xi}^u$  tels que :

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \Delta_\xi \Phi(x_j) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x_j, u) \Phi_{x_i x_k}(x_j) + o(1). \quad (2.28)$$

Ici  $\mathcal{S}$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}^n$ , appelée le *stencil*, qui représente (à la translation  $j$  près) les coordonnées des points entrant dans le schéma. Nous verrons qu'il convient de prendre les coefficients  $\alpha_{j,\xi}^u$  positifs pour obtenir la monotonie du schéma.

Utilisant (2.27), on voit que (2.28) sera satisfait pour toute fonction  $\Phi$  si

$$\alpha_{j,\xi}^u = O((\inf_i h_i)^{-2}), \quad (2.29)$$

et

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \xi_i \xi_k = a_{ik}^h(x_j, u) + o(1), \quad \text{pour tout } i, k, \quad (2.30)$$

ou encore

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \xi \xi^T = a^h(x_j, u) + o(1). \quad (2.31)$$

Le schéma correspondant (de discrétisation de l'équation HJB) est

$$\lambda v_j = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x_j, u) + f(x_j, u) \cdot D^{\eta(x_j, u)} v_j + \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \Delta_\xi v_j \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.32)$$

**Définition 2.7** On dira que le schéma (2.32) est *consistant* si (2.31) est satisfait, et *fortement consistant* si

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \xi \xi^T = a^h(x_j, u). \quad (2.33)$$

La vérification de la condition de consistance (qui ne va pas de soi) fait l'objet de la section suivante.

**Remarque 2.8** La relation ci-dessus donne une estimation de la taille des coefficients, qui implique (2.29). En effet, puisque  $\xi$  a des coordonnées entières, la matrice  $\xi \xi^T$  a des éléments diagonaux supérieurs ou égaux à un. Un schéma fortement consistant satisfait donc

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \leq \text{trace } a^h(x_j, u) = O((\inf_i h_i)^{-2}). \quad (2.34)$$

La forme de point fixe correspondante est (comme toujours) obtenue en multipliant la relation (2.32) par un pas de temps fictif  $h_0$ , puis en ajoutant  $v_j$  à chaque membre, et enfin en divisant par  $1 + h_0\lambda$ . Reprenant la notation  $f^h$  définie en (2.23), on obtient l'expression suivante

$$v_j = (1 + \lambda h_0)^{-1} \inf_{u \in U} \left\{ h_0 \ell(x_j, u) + \left( 1 - h_0 \sum_{i=1}^n |f_i^h(x_j, u)| - 2h_0 \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \right) v_j \right. \\ \left. + h_0 \sum_{i=1}^n f_i^h(x_j, u)_+ v_{j+e_i} + h_0 \sum_{i=1}^n |f_i^h(x_j, u)|_- v_{j-e_i} + h_0 \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u (v_{j-\xi} + v_{j+\xi}) \right\}. \quad (2.35)$$

Cette relation s'interprète comme le principe de programmation dynamique d'une chaîne de Markov si tous les coefficients des  $v_k$  sont positifs. C'est le cas pour tout  $k \neq j$ , et le coefficient de  $v_j$  est positif si la condition de stabilité suivante est satisfaite :

$$h_0 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\|f_i\|}{h_i} + 2 \sup_{j \in \mathbb{Z}^n, u \in U} \left( \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{j,\xi}^u \right) \right) \leq 1. \quad (2.36)$$

On peut combiner cette relation avec (2.34) pour en déduire une estimation du pas de temps :  $h_0 = O((\inf_i h_i)^{-2})$ .

#### 2.2.4 Analyse de la condition de consistance forte

La condition de consistance forte (2.33) revient, puisque les coefficients  $\alpha_{j,\xi}^u$  doivent être positifs, à vérifier que  $a^h(x_j, u)$  appartient au cône engendré par l'ensemble  $\{\xi \xi^T; \xi \in \mathcal{S}\}$ . Nous allons caractériser ce cône dans quelques situations simples. Pour cela, quelques définitions s'imposent.

**Définition 2.9** Soit  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 0$ . (i) On dit que  $C \subset \mathbb{R}^q$  est un *cône* si, pour tout  $t > 0$  et  $c \in C$ , on a  $tc \in C$ . (ii) Soient  $c_1, \dots, c_r$  dans  $\mathbb{R}^q$ . On appelle *cône convexe*  $C$

engendré par  $c_1, \dots, c_r$  l'ensemble des combinaisons linéaires positives de  $c_1, \dots, c_r$ . On dit que  $c_1, \dots, c_r$  est un générateur de  $C$ . (iii) On appelle *générateur minimal* de  $C$  un générateur de  $C$  ne contenant pas strictement un générateur de  $C$ .

**Définition 2.10** Soit  $C$  un cône convexe fermé de  $\mathbb{R}^q$ . On appelle *cône polaire* (positif) de  $C$  l'ensemble

$$C^+ := \{y \in \mathbb{R}^q; y \cdot x \geq 0, \text{ pour tout } x \in C\}. \quad (2.37)$$

$C^+$  est un cône convexe fermé.

Voici un résultat important d'analyse convexe, que nous admettrons (voir par exemple [32]).

**Proposition 2.11** Soit  $C$  un cône convexe fermé de  $\mathbb{R}^q$ . Alors (i) il coïncide avec son cône bipolaire  $(C^+)^+$ , (ii) Si  $C$  a un générateur fini, il en est de même pour  $C^+$ .

Il résulte de cette proposition que, si  $C$  est un cône convexe fermé de générateur fini, il existe donc un générateur fini  $c_1^*, \dots, c_{r'}^*$  du cône polaire. Alors  $C$  est caractérisé par les inégalités linéaires en nombre fini

$$C = \{x \in \mathbb{R}^q; c_i^* \cdot x \geq 0, i = 1, \dots, r'\}. \quad (2.38)$$

On notera  $C(\mathcal{S})$  le cône engendré par les  $\{\xi\xi^T, \xi \in \mathcal{S}\}$ . Considérons le cas où  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S}_p^n$ , avec

$$\mathcal{S}_p^n := \left\{ \varsigma \in \{-1, 0, 1\}^n; \sum_{i=1}^n |\varsigma_i| \leq p \right\}. \quad (2.39)$$

Autrement dit, on considère les transitions vers les points dont les coordonnées diffèrent d'au plus 1 (les voisins immédiats), avec au plus  $p$  coordonnées différentes.

**Proposition 2.12** On a les caractérisations suivantes :

- (i) Pour tout  $n > 0$ ,  $C(\mathcal{S}_1^n)$  est l'ensemble des matrices diagonales semi définies positives.
- (ii) Pour tout  $n > 0$ ,  $C(\mathcal{S}_2^n)$  est l'ensemble des matrices à diagonale dominante :

$$C(\mathcal{S}_2^n) = \left\{ A \in \mathcal{M}^{n \times n}; A = A^T; A_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \right\}. \quad (2.40)$$

- (iii)  $A \in C(\mathcal{S}_3^n)$  si et seulement si, pour tout  $i, j$  dans  $1, \dots, n$  et  $p, q$  dans  $\{0, 1\}$  :

$$\begin{cases} A_{ii} & \geq |A_{ij}|, \\ A_{ii} + A_{jj} & \geq (-1)^p A_{ik} + (-1)^q A_{jk} + 2(-1)^{p+q+1} A_{ij}. \end{cases} \quad (2.41)$$

**Proof.** Le point (i) est immédiat. Montrons (ii). Comme les générateurs du cône sont à diagonale dominante,  $C(\mathcal{S}_2^n)$  est contenu dans le cône des matrices à diagonale dominante.

Réciproquement, soit  $A$  diagonale dominante. Posons  $b_i := a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , soit  $e_i$  le  $i$ ème vecteur de base, et notons  $e_{i \pm j} := e_i \pm e_j$ . Alors la formule

$$A = \sum_{i=1}^n b_i e_i (e_i)^\top + \sum_{i \neq j} \left[ (a_{ij})_+ e_{ij} (e_{ij})^\top + |(a_{ij})_-| e_{i-j} (e_{i-j})^\top \right]. \quad (2.42)$$

montre que  $A$  appartient à  $C(\mathcal{S}_2^n)$ . Nous admettons le point (iii), qui résulte de l'analyse de [13]. ■

**Remarque 2.13** Les résultats de cette section sont liés aux travaux récents de [13]. Une question importante est le calcul rapide des coefficients  $\alpha_{j,\xi}^u$ . Dans le cas de la dimension 2, on trouvera un algorithme rapide et facile à implémenter dans [11]. Le cas de la dimension 3 est ouvert.

## 2.3 Notes

W. H. Fleming et R. Rishel [22] donnent une introduction générale à la théorie de la commande optimale déterministe et stochastique. L'approche par solutions de viscosité est introduite dans P.L. Lions [31]; on en trouvera une synthèse dans W.H. Fleming et H.M. Soner [23]. J.L. Lions et A. Bensoussan [29] présentent l'approche de la commande stochastique par les techniques variationnelles d'équations aux dérivés partielles.

Les méthodes numériques pour la commande stochastique sont exposées dans H.J. Kushner et P.G. Dupuis [28]. On y trouvera en particulier une discussion d'une méthode d'approximation par chaîne de Markov qui inclut les différences finies généralisées. Pour les problèmes de très grande taille il peut être utile d'employer des méthodes multigrille, voir M. Akian [1]. De nombreuses méthodes numériques, dans un cadre de problèmes de finance, sont exposées dans L.C.G. Rogers et D. Talay [34].



# Chapitre 3

## Estimations d'erreur 24 07 09

### 3.1 Principe de comparaison

#### 3.1.1 Solutions de viscosité

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$F(x, v(x), Dv(x), D^2v(x)) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\mathcal{S}^n$ , espace des matrices symétriques de taille  $n$ . Cet espace est muni de la relation d'ordre  $A \succeq B$  si  $A - B$  est semi défini positif. Si  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable et satisfait (3.1), on dit que  $v$  est une *solution classique* de (3.1). On dira aussi que  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable est *sous solution* (resp. *sur solution*) *classique* de (3.1) si elle vérifie

$$F(x, w(x), Dw(x), D^2w(x)) \leq 0, \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Dans la suite du chapitre on supposera  $F$  *faiblement elliptique*, (ou encore *elliptique dégénérée*), au sens où

$$F(x, v, p, A) \leq F(x, v, p, B) \quad \text{si } A \succeq B. \quad (3.3)$$

Le problème standard de la commande optimale stochastique rentre dans ce cadre en posant

$$F(x, v, p, Q) = \lambda v + \sup_{u \in U} \{-\ell(x, u) - p \cdot f(x, u) - a(x, u) \circ Q\} \quad (3.4)$$

où l'opérateur  $\circ$ , a été introduit dans la définition 2.1. En effet, si  $Q$  et  $Q'$  sont deux matrices symétriques, on a

$$F(x, v, p, Q') - F(x, v, p, Q) \leq \sup_{u \in U} \{-a(x, u) \circ (Q' - Q)\}. \quad (3.5)$$

Posons  $Q'' := Q' - Q$ . Utilisant le fait que  $a(x, u) = (a_{ij}(x, u))$  est semi définie positive, on vérifie facilement que  $a(x, u) \circ Q''$  est positive si  $Q''$  est semi définie positive. En effet, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques,  $A = \sum_i \lambda_i x^i (x^i)^\top$ , et  $B = \sum_i \mu_i y^i (y^i)^\top$ , où les  $x^i$  et  $y^i$

sont une base orthogonale de vecteurs propres de  $A$  et  $B$ , on a  $A \circ B = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j ((x^i)^\top y^j)^2$ . Si  $A$  et  $B$  sont semi définies positives, leurs valeurs propres  $\lambda_i$  et  $\mu_j$  sont positives, donc

$$A \succeq 0 \text{ et } B \succeq 0 \quad \Rightarrow \quad A \circ B \geq 0. \quad (3.6)$$

Le *hamiltonien* du problème standard de la commande optimale stochastique, d'expression

$$H(x, u, r, p, Q) := \lambda r - \ell(x, u) - p \cdot f(x, u) - a(x, u) \circ Q \quad (3.7)$$

est donc bien faiblement elliptique, et il en est de même de l'équation HJB qu'on peut écrire sous la forme

$$\sup_{u \in U} H(x, u, v(x), Dv(x), D^2v(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.8)$$

Le caractère faiblement elliptique de (3.1) permet de définir une notion de solution généralisée dite *solution de viscosité*.

On dira que  $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$  est un *surjet (du second ordre)* au point  $\bar{x}$  si

$$v(x) \leq v(\bar{x}) + p \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top X(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2). \quad (3.9)$$

L'ensemble des surjets de  $v$  en  $\bar{x}$  est noté  $J^{2,+}v(\bar{x})$ . De la même manière on note  $J^{2,-}v(\bar{x})$  l'ensemble des *sousjets* de  $v$  en  $\bar{x}$ , couples  $(p, X)$  tels que :

$$v(x) \geq v(\bar{x}) + p \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top X(x - \bar{x}) + o(|x - \bar{x}|^2). \quad (3.10)$$

Les ensembles  $J^{2,\pm}v(\bar{x})$  sont convexes ; si l'intersection

$$J^2v(\bar{x}) := J^{2,-}v(\bar{x}) \cap J^{2,+}v(\bar{x}) \quad (3.11)$$

est non vide, c'est un singleton qui donne un développement de Taylor au second ordre de  $v$  en  $\bar{x}$ .

Soit  $(p, X) \in J^{2,+}v(\bar{x})$ . Si  $v$  a une dérivée seconde en  $\bar{x}$ , alors  $Dv(\bar{x}) = p$  et  $D^2v(\bar{x}) \preceq X$ . Si  $v$  est une sous solution classique de (3.1), en raison de l'ellipticité faible de  $F$ , on a  $F(\bar{x}, v(\bar{x}), p, X) \leq 0$ . De même, si  $w$  est sur solution classique de (3.1), et  $(p, X) \in J^{2,-}w(\bar{x})$ , alors  $F(\bar{x}, w(\bar{x}), p, X) \geq 0$ . Ceci fournit un moyen de définir une notion de semi solution généralisée de (3.1).

**Définition 3.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une fonction  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *sous solution* (resp. *sur solution*) au sens de viscosité de (3.1) sur  $\Omega$  si, pour tout  $\bar{x} \in \Omega$ , et  $(p, X) \in J^{2,+}v(\bar{x})$  (resp.  $(p, X) \in J^{2,-}v(\bar{x})$ ) alors

$$F(\bar{x}, v(\bar{x}), p, X) \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0). \quad (3.12)$$

On dit que  $v$  est *solution au sens de viscosité* de (3.1) sur  $\Omega$  si elle est à la fois sur et sous solution au sens de viscosité sur  $\Omega$ .

**Remarque 3.2** Si  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois continûment dérivable, en raison de l'ellipticité de  $F$ ,  $v$  est sous (sur) solution de viscosité ssi elle est sous (sur) solution classique.

**Remarque 3.3** Si  $F$  est elliptique et continue, on vérifie que  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est sous (sur) solutions de viscosité ssi, pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , si  $v - \varphi$  a un maximum (minimum) local en  $x$ , alors  $F(x, v(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0$  ( $\geq 0$ ). Pour une démonstration dans le cas d'équations du premier ordre, voir Barles [3].

**Remarque 3.4** Si  $F$  est elliptique et continue, on vérifie facilement avec la remarque précédente qu'une limite localement uniforme de sous (sur) solutions de viscosité est sous (sur) solution de viscosité.

Quand dans la suite on parlera de (semi) solution, il faudra comprendre (semi) solution au sens de viscosité.

Terminons cette section par quelques compléments concernant les jets du second ordre. On définit la "fermeture" du surjet comme

$$\bar{J}^{2,+}v(\bar{x}) := \left\{ \begin{array}{l} (p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n; \exists x_k \rightarrow \bar{x}; v(x_k) \rightarrow v(\bar{x}); \\ J^{2,+}v(x_k) \ni (p_k, X_k) \rightarrow (p, X) \end{array} \right\}. \quad (3.13)$$

La terminologie est quelque peu abusive; il s'agit, si  $v$  est continue, de la fermeture de l'application  $x \mapsto (v(x), J^{2,+}v(x))$ . Les ensembles  $\bar{J}^{2,-}v(\bar{x})$  et  $\bar{J}^2v(\bar{x})$  sont définis d'une manière similaire, en remplaçant respectivement  $J^{2,+}v(x_n)$  par  $J^{2,-}v(x_n)$  et  $J^2v(x_n)$  dans la définition.

Il est clair que, si  $F$  est continu, et si  $v$  est sous (resp. sur) solution de (3.1), alors (3.12) est satisfait pour tout  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}v(x)$  (resp.  $\bar{J}^{2,-}v(x)$ ).

Une fonction  $v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  est *décomposable* si on peut l'écrire sous la forme

$$v(x) = v_1(x_1, \dots, x_r) + v_2(x_{r+1}, \dots, x_q), \quad (3.14)$$

avec  $1 < r < q$ . Dans ce cas on dit que  $(p, X) \in J^{2,\pm}v(x_n)$  ou  $\bar{J}^{2,\pm}v(\bar{x})$  est *décomposable* si  $X$  est bloc diagonal, les blocs étant de taille  $r$  et  $q - r$ . On note  $x^1 = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $x^2 = (x_{r+1}, \dots, x_q)$ , et de même pour  $\bar{x}$  et  $p$ .

**Lemme 3.5** *Soit  $v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  décomposable. Alors tout  $(p, X) \in \bar{J}^2v(\bar{x})$  est décomposable, et ses deux blocs  $X_1$  et  $X_2$  sont tels que  $(p^i, X_i) \in \bar{J}^2v_i(\bar{x}^i)$ , pour  $i = 1, 2$ .*

**Proof.** Soient les suites  $x_k$  et  $(p_k, X_k)$  donnés par la définition de  $\bar{J}^2w(\bar{x})$ . Par définition,  $(p_k, X_k)$  donne un développement de Taylor à l'ordre deux de  $v$  en  $x_k$ , donc de  $v_i$  en  $x_k^i$ , pour  $i = 1, 2$ . Comme le développement de Taylor est unique, celui de  $v$  est la somme de ceux de  $v_1$  et  $v_2$ . Ceci implique que  $X_k$  est formée de deux blocs diagonaux de taille  $r$  et  $q - r$ . On conclut en passant à la limite. ■

### 3.1.2 Lemme d'Ishii

L'étude de l'unicité forte des semi solutions de l'équation (3.1) nécessite une série de lemmes, aboutissant au lemme d'Ishii 3.12. Les trois premiers sont des résultats classiques. On trouvera les démonstrations des lemmes 3.6 et 3.8 dans [18] (et ses références) et du lemme 3.7 dans par exemple [12, Section 2.4].

**Lemme 3.6 (Rademacher)** *Une fonction localement lipschitzienne  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est Fréchet dérivable presque partout.*

**Lemme 3.7** *Une fonction convexe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est localement lipschitzienne (donc presque partout Fréchet dérivable en raison du lemme de Rademacher).*

**Lemme 3.8 (Aleksandrov)** *Une fonction convexe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois Fréchet dérivable presque partout.*

La conclusion des deux lemmes précédents s'étend immédiatement aux différences de fonctions convexes, et en particulier aux fonctions *semiconvexes*, c'est à dire les fonctions  $v$  telles que  $v(x) + \frac{1}{2}\alpha|x|^2$  est convexe pour  $\alpha > 0$  assez grand.

**Lemme 3.9 (Jensen)** *Soit  $\bar{x}$  un maximum local strict d'une fonction semiconvexe  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $p \in \mathbb{R}^n$ , posons  $\psi_p(x) := \psi(x) + p \cdot x$ . Alors pour  $r > 0$  et  $\delta > 0$  assez petits, l'ensemble suivant est de mesure strictement positive :*

$$K := \{x \in B(\bar{x}, r); \exists p \in \bar{B}_\delta; \psi_p \text{ a un maximum local en } x\}. \quad (3.15)$$

**Proof.** a) Puisque  $\psi$  est semiconvexe, elle est continue. Pour  $r > 0$  assez petit,  $\bar{x}$  est maximum local strict de  $\psi$  sur  $\bar{B}(\bar{x}, r)$ . Quand  $p \in \bar{B}_\delta$  et  $\delta \downarrow 0$ , les maxima de  $\psi_p$  sur  $\bar{B}(\bar{x}, r)$  convergent uniformément vers  $\bar{x}$ ; donc, pour  $\delta$  assez petit (dépendant de  $r$ ), on a

$$B(\bar{x}, \frac{1}{2}r) \supset \operatorname{argmax}\{\psi_p(x); x \in \bar{B}(\bar{x}, r)\}, \quad \text{pour tout } p \in \bar{B}_\delta. \quad (3.16)$$

Comme la mesure de  $K$  croît avec  $\delta$ , il suffit d'obtenir la conclusion quand (3.16) est satisfait.

b) On traite d'abord le cas où  $\psi$  est de classe  $C^2$ . Si  $x \in K$  réalise le maximum de  $\psi_p$ , alors  $D\psi(x) + p = 0$ , donc  $D\psi(K) = \bar{B}_\delta$ . Soit  $\alpha \geq 0$  tel que  $\psi(x) + \frac{1}{2}\alpha|x|^2$  soit convexe; sur  $K$ , on a donc  $-\alpha I \preceq D^2\psi(x)$ ; d'autre part, puisque  $\psi_p$  atteint son maximum en  $x$ , on a aussi  $D^2\psi(x) \preceq 0$ , d'où  $|\det D^2\psi(x)| \leq \alpha^n$ , et de là

$$\operatorname{meas}(\bar{B}_\delta) = \operatorname{meas}(D\psi(K)) = \int_{D\psi(K)} dy = \int_K |\det D^2\psi(x)| dx \leq \alpha^n \operatorname{meas}(K), \quad (3.17)$$

qui donne une estimation inférieure de  $\operatorname{meas}(K)$  ne dépendant que de  $\alpha$ .

c) Si  $\psi$  n'est pas de classe  $C^2$ , on l'approche par  $\psi_\varepsilon$ , *convolution* de  $\psi$  avec un noyau régularisant :

$$\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\rho(y/\varepsilon)dy, \quad (3.18)$$

où  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie les hypothèses suivantes :

$$\rho \text{ est positive, de classe } C^\infty, \text{ à support dans } \bar{B}(0, 1), \text{ et de masse unité.} \quad (3.19)$$

Dire que  $\rho$  est de masse unité signifie que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ . Enfin on pose  $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ , de sorte que  $\psi_\varepsilon(x) := \psi * \rho_\varepsilon(x)$  où  $*$  représente le produit de convolution.

On sait que  $\psi_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$ , et converge uniformément vers  $\psi$  sur  $B(\bar{x}, r)$ . Montrons que  $\psi_\varepsilon$  est semiconvexe avec la même constante  $\alpha$ . Notons  $r(x) := |x|^2$ . On sait que  $\psi(x) + \frac{1}{2}\alpha r(x)$  est convexe. Régularisant les deux membres de l'inégalité de convexité on déduit que  $\psi_\varepsilon(x) + \frac{1}{2}\alpha r_\varepsilon(x)$  est convexe. Mais

$$r_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^2 \rho_\varepsilon(y) dy = |x|^2 - 2x \cdot \int_{\mathbb{R}^n} y \rho_\varepsilon(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \rho_\varepsilon(y) dy. \quad (3.20)$$

Retranchant le terme affine (les deux dernières intégrales) on déduit le résultat cherché.

En raison de (3.16), pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, la fonction  $x \rightarrow \psi_\varepsilon(x) + p \cdot x$  possède, pour tout  $p \in \bar{B}_\delta$ , un maximum sur  $B(\bar{x}, r)$ . Notons  $K_\varepsilon$  l'ensemble  $K$  associé à la fonction  $\psi_\varepsilon$ . Procédant comme dans (3.17), on obtient  $\text{meas}(K_\varepsilon) \geq \alpha^{-n} \text{meas}(\bar{B}_\delta)$ . Montrons que

$$K \supset \bigcap_{q=1}^{\infty} \bigcup_{m=q}^{\infty} K_{1/m}. \quad (3.21)$$

En effet, soit  $\hat{x}$  dans le membre de droite ; c'est un éléments d'une sous suite constante (à partir d'un certain rang) des ensembles  $K_{1/m}$ . Il existe donc une suite  $p_k$  dans  $\bar{B}_\delta$  telle que  $\psi_{p_k}^{1/k}(x)$  admette sur  $B(\bar{x}, r)$  un maximum en  $\hat{x}$ . Soit  $\hat{p} \in \bar{B}_\delta$  un point d'adhérence de  $p_k$ . Alors  $\psi_{\hat{p}}$  atteint en  $\hat{x}$  son maximum sur  $\bar{B}(\bar{x}, r)$  ; en raison de (3.16),  $\hat{x} \in B(\bar{x}, \frac{1}{2}r)$ , donc  $\hat{x} \in K$ , ce qui établit (3.21).

D'autre part  $\hat{K}_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} K_{1/m}$  est de mesure au moins  $\alpha^{-n} \text{meas}(\bar{B}_\delta)$ . Puisque la suite  $\hat{K}_n$  est décroissante, on a  $\text{meas} \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{K}_n = \lim_n \text{meas}(\hat{K}_n)$  d'où la conclusion. ■

**Lemme 3.10** Soient  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  tels que  $x \rightarrow w(x) + \frac{1}{2}\alpha|x|^2$  est convexe, et  $B \in \mathcal{S}^n$  tels que  $w(0) = \max_x \{w(x) - \frac{1}{2}x^\top Bx\}$ . Alors il existe  $(0, X) \in \bar{J}^2 w(0)$  tel que  $-\alpha I_d \preceq X \preceq B$ .

**Proof.** La fonction  $w(x) - \frac{1}{2}x^\top Bx - |x|^4$  a un maximum strict en 0. Combinant les lemmes d'Aleksandrov et de Jensen, on obtient l'existence, pour tout  $\delta > 0$ , de  $p_\delta$  et  $x_\delta$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $|p_\delta| \leq \delta$ ,  $|x_\delta| \leq \delta$ ,  $w$  est deux fois différentiable en  $x_\delta$ , et  $w(x) + p_\delta \cdot x - \frac{1}{2}x^\top Bx - |x|^4$  a un maximum en  $x_\delta$ .

Ceci implique  $|Dw(x_\delta)| = O(\delta)$  et  $D^2w(x_\delta) \preceq B + o(1)$ . De plus la semiconvexité de  $w$  implique  $-\alpha I_d \preceq D^2w(x_\delta)$ , donc  $D^2w(x_\delta)$  est borné. Passant à la limite, dans une suite extraite, dans la relation  $(Dw(x_\delta), D^2w(x_\delta)) \in \bar{J}^2 w(x_\delta)$ , on obtient le résultat. ■

On définit la *sup convolution*<sup>1</sup> de  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty[$  comme la famille de fonctions paramétrées par  $\alpha > 0$  :

$$v_\alpha(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{v(y) - \frac{1}{2}\alpha|y - x|^2\}. \quad (3.22)$$

<sup>1</sup>Sous entendu avec le noyau  $y \mapsto -\frac{1}{2}\alpha|y|^2$ . Ce n'est rien d'autre que l'approximée Yosida, voir par exemple [8, 14], opérant par maximisation plutôt que minimisation.

Ceci s'écrit

$$v_\alpha(x) = -\frac{1}{2}\alpha|x|^2 + \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{v(y) - \frac{1}{2}\alpha|y|^2 - \alpha y \cdot x\}. \quad (3.23)$$

Un suprémum de fonctions affines étant convexe, on en déduit que  $v_\alpha(x) + \frac{1}{2}\alpha|x|^2$  est convexe.

**Lemme 3.11 (Propriétés magiques de la sup convolution)** *Soient  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s.c.s. et majorée, et  $\alpha > 0$ . Si  $(p, X) \in J^{2,+}v_\alpha(x)$ , alors*

$$(p, X) \in J^{2,+}v(x + p/\alpha) \quad \text{et} \quad v_\alpha(x) + \frac{1}{2\alpha}|p|^2 = v(x + p/\alpha). \quad (3.24)$$

*En particulier, si  $(0, X) \in \bar{J}^{2,+}v_\alpha(0)$ , alors  $(0, X) \in \bar{J}^{2,+}v(0)$ .*

**Proof.** Comme  $v$  est s.c.s. majorée, il existe  $y$  tel que  $v_\alpha(x) = v(y) - \frac{1}{2}\alpha|y - x|^2$ . Pour tout  $\xi$  et  $\eta$  dans  $\mathbb{R}^n$ , utilisant la définition de  $v_\alpha$  et le fait que  $(p, X) \in J^{2,+}v_\alpha(x)$ , il vient

$$\begin{aligned} v(\xi) - \frac{1}{2}\alpha|\eta - \xi|^2 &\leq v_\alpha(\eta) \\ &\leq v_\alpha(x) + p \cdot (\eta - x) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\eta - x)^\top X(\eta - x) + o(|\eta - x|^2) \\ &= v(y) - \frac{1}{2}\alpha|y - x|^2 + p \cdot (\eta - x) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\eta - x)^\top X(\eta - x) + o(|\eta - x|^2). \end{aligned}$$

Choisissant  $\eta = \xi - y + x$ , il vient

$$v(\xi) \leq v(y) + p \cdot (\xi - y) + \frac{1}{2}(\xi - y)^\top X(\xi - y) + o(|\xi - y|^2),$$

c'est à dire  $(p, X) \in J^{2,+}v(y)$ . Par ailleurs, le choix  $\xi = y$  et  $\eta = x + q$ , avec  $q \in \mathbb{R}^n$ , donne après simplification

$$q \cdot (\alpha(y - x) - p) \leq O(|q|^2).$$

Prenant  $q = \theta(\alpha(y - x) - p)$ , avec  $\theta \downarrow 0$ , on obtient  $\theta|\alpha(y - x) - p|^2 = O(\theta^2)$ , d'où  $p = \alpha(y - x)$ , ou encore  $y = x + p/\alpha$  qui implique (3.24). Le dernier énoncé du lemme s'en déduit facilement.  $\blacksquare$

Si  $A \in \mathcal{S}^n$ , on note  $|A|_2$  la norme de  $A$  associée à la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ; c'est le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de  $A$ .

**Lemme 3.12 (Ishii)** *Soient  $v$  une fonction s.c.s. de  $\mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty[$ , et  $\psi$  de classe  $C^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $v - \psi$  a un maximum local en  $\bar{x}$ , posons  $A := D^2\psi(\bar{x})$ . Alors pour tout  $\varepsilon_0 > 0$ , il existe  $X \in \mathcal{S}^n$  tel que  $(D\psi(\bar{x}), X) \in \bar{J}^{2,+}v(\bar{x})$  ainsi que :*

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + |A|_2\right) I_d \preceq X \preceq A + \varepsilon_0 A^2. \quad (3.25)$$

*Si de plus  $v$  est décomposable (relation (3.14)), on peut imposer les relations suivantes : la matrice  $X$  est bloc diagonale et, notant  $X_1$  et  $X_2$  ses blocs diagonaux, et  $D_1\psi(\bar{x})$ ,  $D_2\psi(\bar{x})$  la partition correspondante de  $D\psi(\bar{x})$ , on a  $(D_i\psi(\bar{x}), X_i) \in \bar{J}^{2,+}v_i(\bar{x}^i)$ , pour  $i = 1, 2$  où  $x^1 = (x_1, \dots, x_r)$  et  $x^2 = (x_{r+1}, \dots, x_q)$ .*

**Proof.** a) Réduction. Par translation on se ramène au cas où  $v(0) = \psi(0) = 0$  et  $\bar{x} = 0$ . Retirant  $D\psi(0)x$  à  $v$  et  $\psi$ , on peut supposer  $D\psi(0) = 0$ . Enfin on se ramène au cas où  $\psi$  est quadratique, soit  $\psi(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax$ . En effet, pour  $\beta > 0$ ,  $v(x) - \frac{1}{2}x^\top(A + \beta I_d)x$  a un maximum local strict en 0. Si la conclusion du lemme vaut dans ce cas, passant à la limite grâce aux estimations (3.25) (qui donnent une borne sur la norme de  $X$ ) on en déduit le résultat cherché (pour  $\beta = 0$ ). On supposera donc dans la suite que

$$v(x) - \frac{1}{2}x^\top Ax \leq 0 = v(0). \quad (3.26)$$

b) On introduit la sup convolution. Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , l'inégalité de Cauchy Schwarz implique

$$2y^\top A(x - y) \leq 2|Ay||x - y| \leq \varepsilon y^\top A^2 y + \frac{1}{\varepsilon}|x - y|^2 \quad (3.27)$$

et donc

$$x^\top Ax = (y + x - y)^\top A(y + x - y) \leq y^\top (A + \varepsilon A^2)y + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|_2\right)|x - y|^2. \quad (3.28)$$

Posant  $\alpha := 1/\varepsilon + \|A\|_2$ , il vient avec (3.26)

$$v(x) - \frac{1}{2}\alpha|x - y|^2 \leq \frac{1}{2}y^\top (A + \varepsilon A^2)y, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n, \quad (3.29)$$

qui équivaut à

$$v_\alpha(y) \leq \frac{1}{2}y^\top (A + \varepsilon A^2)y, \quad (3.30)$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ . En particulier  $v_\alpha(0) \leq 0$ , or on a toujours  $v(0) \leq v_\alpha(0)$ , donc  $v_\alpha(0) = 0$ . Ainsi (3.30) équivaut à  $v_\alpha(0) = \max_y \{v_\alpha(y) - \frac{1}{2}y^\top (A + \varepsilon A^2)y\}$ .

c) Combinant la dernière relation avec le lemme 3.10 on obtient l'existence de  $X \in \mathcal{S}^n$  vérifiant (3.25) et tel que  $(0, X) \in \bar{J}^2 v_\alpha(0)$ . Le lemme 3.11 implique que  $(0, X) \in \bar{J}^{2,+} v(0)$ . Enfin, si  $v$  est décomposable, on conclut avec le lemme 3.5.  $\blacksquare$

**Remarque 3.13** Le choix trivial  $X = A$  satisfait (3.25) ainsi que  $(D\psi(\bar{x}), X) \in \bar{J}^{2,+} v(\bar{x})$ . La force du lemme réside donc dans la possibilité de choisir  $X$  décomposable si  $v$  l'est.

### 3.1.3 Séparation des variables

Dans cette section on établit un outil qui servira à la comparaison des sous et sur solutions d'équations faiblement elliptiques. Soient deux fonctions  $v$  et  $w$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $v$  s.c.s. et majorée, et  $w$  s.c.i. et minorée. On étudie les majorations de  $v - w$ . La quantité  $\sup(v - w)$  est finie. On aimerait écrire des conditions vérifiées en un point de  $\mathbb{R}^n$  où  $v - w$  atteint son supremum, mais un tel point n'existe pas nécessairement.

Ceci amène à considérer la fonction  $\Psi_{\alpha,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\alpha > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , définie par

$$\Psi_{\alpha,\varepsilon}(x, y) := v(x) - w(y) - \frac{1}{2}\alpha|x - y|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon(|x|^2 + |y|^2). \quad (3.31)$$

Nous allons vérifier que le maximum de  $\Psi_{\alpha,\varepsilon}$  est atteint, et appliquer le lemme d'Ishii.

**Lemme 3.14** *On suppose  $v$  ou  $w$  hölderienne de constantes  $C_0 > 0$ ,  $\mu_0 \in ]0, 1]$ . Alors pour tout  $\alpha > 0$ , quand  $\varepsilon > 0$  est assez petit, il existe  $(x, y) \in \operatorname{argmax} \Psi_{\alpha, \varepsilon}$  tels que, posant*

$$p_x := \alpha(x - y) + \varepsilon x, \quad p_y := \alpha(x - y) - \varepsilon y, \quad (3.32)$$

on a

$$|x - y| \leq (4C_0/\alpha)^{1/(2-\mu_0)}, \quad (3.33)$$

$$v(x) - w(y) = \sup(v - w) + o(1), \quad (3.34)$$

$$(p_x, X) \in \bar{J}^{2,+}v(x); \quad (p_y, Y) \in \bar{J}^{2,-}w(y), \quad (3.35)$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \preceq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + 2\varepsilon \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

**Proof.** La démonstration comporte quatre étapes. On supposera  $v$  hölderienne, l'autre cas se traitant d'une manière similaire.

a) La quantité  $\sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} \leq \sup v - \inf w$  est finie. Soit  $(x_k, y_k)$  une suite maximisante de  $\Psi_{\alpha, \varepsilon}$ . De  $\Psi_{\alpha, \varepsilon}(x_k, y_k) \geq \sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} + o(1)$  on déduit

$$\frac{1}{2}\varepsilon(|x_k|^2 + |y_k|^2) \leq \sup v - \inf w - \sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} + o(1); \quad (3.37)$$

la suite est donc bornée. Comme  $v$  et  $(-w)$  sont s.c.s., on en déduit que  $\Psi_{\alpha, \varepsilon}$  atteint son maximum en (au moins) un point  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

b) Donnons une estimation de  $|\bar{x} - \bar{y}|$ . Puisque  $v$  est hölderienne, on déduit de  $\Psi_{\alpha, \varepsilon}(\bar{x}, \bar{y}) \geq \Psi_{\alpha, \varepsilon}(\bar{y}, \bar{y})$  la relation

$$\frac{1}{2}\alpha|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leq v(\bar{x}) - v(\bar{y}) + \frac{1}{2}\varepsilon(|\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2) \leq C_0|\bar{x} - \bar{y}|^{\mu_0} + \frac{1}{2}\varepsilon|\bar{y}|^2. \quad (3.38)$$

On vérifie facilement que (pour  $\alpha > 0$  fixé)  $\sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} \uparrow \sup \Psi_{\alpha, 0}$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , et donc  $\frac{1}{2}\varepsilon|\bar{y}|^2 \downarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$  (passage à la limite de la valeur pénalisée et limite nulle de la contribution à la valeur du terme pénalisé). Donc soit  $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} |\bar{x} - \bar{y}| = 0$ , soit il existe  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $\frac{1}{2}\alpha|\bar{x} - \bar{y}|^2 \leq 2C_0|\bar{x} - \bar{y}|^{\mu_0}$ . Dans tous les cas on peut choisir  $\varepsilon$  tel que (3.33) est satisfait.

c) Montrons (3.34). Prenant  $x = y$  dans l'expression de  $\Psi_{\alpha, \varepsilon}$ , il vient

$$v(\bar{x}) - w(\bar{y}) \geq \sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} \geq \sup_z \{v(z) - w(z) - \varepsilon|z|^2\} \quad (3.39)$$

et on conclut avec l'argument de limite nulle de la contribution à la valeur du terme pénalisé.

d) Appliquons le lemme d'Ishii 3.12. Soit  $\Phi(x, y) := \frac{1}{2}\alpha|x - y|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon(|x|^2 + |y|^2)$ , et  $A := D^2\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ . Puisque  $v(x) - w(y) - \Phi(x, y)$  atteint son maximum en  $(\bar{x}, \bar{y})$ , ce lemme assure l'existence pour tout  $\varepsilon_0 > 0$  de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{S}^n$  tels que

$$\begin{cases} (D_x \Phi(\bar{x}, \bar{y}), X) \in \bar{J}^{2,+}v(\bar{x}); \\ (D_y \Phi(\bar{x}, \bar{y}), -Y) \in \bar{J}^{2,+}(-w(\bar{y})); \end{cases} \quad \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \preceq A + \varepsilon_0 A^2. \quad (3.40)$$



On a  $D\Phi(\bar{x}, \bar{y}) = (p_x, -p_y)$ . Utilisant  $\bar{J}^{2,+}(-w(\bar{y})) = -\bar{J}^{2,-}w(\bar{y})$ , on obtient (3.35). Comme

$$A = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

choisissant  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit on déduit (3.36).  $\blacksquare$

**Remarque 3.15** La relation (3.36) équivaut à

$$a^\top Xa - b^\top Yb \leq \alpha|b - a|^2 + 2\varepsilon(|a|^2 + |b|^2), \quad \text{pour tout } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (3.42)$$

Plus généralement, si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux matrices  $n \times q$ , prenant le produit scalaire de Frobenius des deux membres de la dernière relation de (3.36) par la matrice semidéfinie positive  $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_1^\top & \sigma_1 \sigma_2^\top \\ \sigma_2 \sigma_1^\top & \sigma_2 \sigma_2^\top \end{pmatrix}$  de taille  $2n \times 2n$ , combinant à la relation (3.6), il vient<sup>2</sup>

$$\sigma_1 \sigma_1^\top \circ X - \sigma_2 \sigma_2^\top \circ Y \leq \alpha(\sigma_1 - \sigma_2) \circ (\sigma_1 - \sigma_2) + 2\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_1 + \sigma_2 \circ \sigma_2). \quad (3.43)$$

### 3.1.4 Principe de comparaison abstrait

Soit  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  deux classes de fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On dira que  $F$  vérifie un *principe d'unicité forte* pour les classes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  si toute sous solution  $v$  de (3.1) dans  $\mathcal{C}_1$  et toute sur solution  $w$  de (3.1) dans  $\mathcal{C}_2$  sont telles que  $\sup v \leq \inf w$ . On verra plus loin des exemples de classes de fonctions  $\mathcal{C}_i$ .

Dans la suite (en particulier pour les estimations d'erreur des solutions de schémas de discrétisation) on aura plus généralement besoin de comparer les semi solutions associées à deux équations différentes.

On dira que  $F$  est *uniformément croissant* en  $v$  s'il existe  $c_F > 0$  tel que, pour tout  $x$  et  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $X \in \mathcal{S}^n$ ,  $v$  et  $v'$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$F(x, v', p, A) - F(x, v, p, A) \geq c_F(v' - v). \quad (3.44)$$

Nous aurons aussi besoin d'une autre hypothèse plus technique, liée à la démonstration du théorème 3.17 ci-dessous (on applique ensuite ces résultats au contrôle stochastique dans le lemme 3.19). On a défini  $(p_x, p_y)$  en (3.32) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } K_1 > 0, K_2 > 0, \mu \in ]0, 1], \eta_1 \in \mathbb{R}, \eta_2 > 0, \text{ tels que, pour tous,} \\ \alpha > 1, \varepsilon \in ]0, 1[, r \in \mathbb{R}, x, y \text{ dans } \mathbb{R}^n, \text{ et } X, Y \text{ dans } \mathcal{S}^n \text{ satisfaisant (3.36),} \\ \text{on a} \\ F(y, r, p_y, Y) - \bar{F}(x, r, p_x, X) \leq \eta_1 + \alpha\eta_2^2 + \\ K_1 (|x - y|^\mu + \alpha|x - y|^2) + \varepsilon K_2(1 + |x|^2 + |y|^2). \end{array} \right. \quad (3.45)$$

<sup>2</sup>Utilisant  $\sigma \sigma^\top \circ I = \text{trace } \sigma \sigma^\top = \sigma \circ \sigma$ .

**Remarque 3.16** Relions (3.45) à la condition d'ellipticité faible. Il suffit de traiter le cas où  $Y - X$  est défini positif. Alors pour tout  $\alpha > 0$ , (3.36) est toujours satisfait. Fixons  $r$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x$  et  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et prenons  $y$  tel que  $p = \alpha(x - y)$ ,  $\alpha \uparrow \infty$  (et donc  $y \rightarrow x$ ). On déduit de (3.45), quand  $\varepsilon \downarrow 0$ , que, pour tout  $x, r, p$ , si  $\eta_2 = 0$  :

$$\bar{F}(x, r, p, Y) - F(x, r, p, X) \leq \eta_1. \quad (3.46)$$

En particulier, si  $\bar{F} = F$  et  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , la condition (3.45) implique l'ellipticité faible de  $F$ .

On note  $a \wedge b$  la quantité  $\min(a, b)$ .

**Théorème 3.17 (Principe d'unicité fort)** Soient  $F$  et  $\bar{F}$  uniformément croissant en  $v$ , satisfaisant (3.45). Soient  $v$  une sous solution de (3.1) pour  $F = \bar{F}$ , s.c.s. et majorée, et  $w$  une sur solution de (3.1), s.c.i. et minorée. On suppose une de ces deux fonctions hölderienne de constantes  $C_0 > 0$  et  $\mu_0 \in ]0, 1]$ . Alors il existe  $C = C(K_1, \mu, \mu_0, C_0)$  telle que ( $c_{\bar{F}}$  assurant (3.44) pour  $\bar{F}$ ) :

$$\sup(v - w) \leq c_{\bar{F}}^{-1} \left( \eta_1 + C\eta_2^{\hat{\mu}_0} \right), \quad \text{où } \hat{\mu}_0 := \frac{\mu \wedge \mu_0}{1 - \frac{1}{2}(\mu_0 - \mu)_+}. \quad (3.47)$$

**Proof.** Le lemme 3.14 assure l'existence, pour tout  $\alpha > 0$ , de  $\varepsilon > 0$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  satisfaisant (3.32)-(3.36). Comme  $v$  et  $w$  sont sous et sur solution de viscosité de (3.1) pour  $\bar{F}$  et  $F$  respectivement, il vient avec (3.35)

$$\bar{F}(x, v(x), p_x, X) \leq 0 \leq F(y, w(y), p_y, Y). \quad (3.48)$$

Combinant cette inégalité avec la croissance uniforme de  $\bar{F}$ , on obtient

$$\begin{aligned} c_{\bar{F}}(v(x) - w(y)) &\leq \bar{F}(x, v(x), p_x, X) - \bar{F}(x, w(y), p_x, X), \\ &\leq F(y, w(y), p_y, Y) - \bar{F}(x, w(y), p_x, X). \end{aligned} \quad (3.49)$$

On déduit alors de (3.45) que

$$c_{\bar{F}}(v(x) - w(y)) \leq \eta_1 + \alpha\eta_2^2 + K_1(|x - y|^\mu + \alpha|x - y|^2) + \varepsilon K_2(1 + |x|^2 + |y|^2). \quad (3.50)$$

On vérifie facilement que  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \Psi_{\alpha, \varepsilon} = \sup \Psi_{\alpha, 0}$ , donc  $\varepsilon(1 + |x|^2 + |y|^2) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \downarrow 0$ . Majorant  $|x - y|$  grâce à (3.33), et utilisant (3.34), on déduit l'existence de  $C_1 = C_1(K_1, C_0)$  telle que

$$c_{\bar{F}} \sup(v - w) \leq \eta_1 + \alpha\eta_2^2 + C_1 \alpha^{\frac{-(\mu \wedge \mu_0)}{2 - \mu_0}}. \quad (3.51)$$

Posons  $b := \mu \wedge \mu_0 / (2 - \mu_0)$ . Le minimum de  $\alpha\eta_2^2 + C_1 \alpha^{-b}$ , obtenu quand  $\eta_2^2 - bC_1 \alpha^{-b-1} = 0$ , soit  $\alpha = (bC_1/\eta_2^2)^{\frac{1}{b+1}}$ , vaut  $C_2 \eta_2^{\frac{2b}{b+1}}$ , avec  $C_2 = C_2(K_1, \mu, \mu_0, C_0)$ . Or

$$\frac{2b}{b+1} = \frac{2(\mu \wedge \mu_0)}{2 - \mu_0 + \mu \wedge \mu_0} = \frac{\mu \wedge \mu_0}{1 - \frac{1}{2}(\mu_0 - \mu)_+}, \quad (3.52)$$

d'où (3.47). ■

**Remarque 3.18** On a suivi [25, Thm 2.1] avec deux différences mineures : on ne suppose pas les deux semi solutions h"olderiennes mais seulement l'une d'entre elles, et on ne suppose pas  $\eta_2 < 1$  (ce qui est fait dans la preuve de [25, Thm 2.1]). Si  $\eta_2 < 1$  on d"eduit de (3.47) que  $\sup(v - w) \leq C(\eta_1 + \eta_2^{\mu \wedge \mu_0})$  ce qui est le r"esultat du th"eor"eme cit"e.

### 3.1.5 Unicit"e forte en commande optimale stochastique

Dans cette section nous appliquons le principe de comparaison au cas du probl"eme de contr"ole stochastique. Dans le cas o"u  $F = \bar{F}$ , on en d"eduit que toute sous solution est major"ee par toute sur solution, dans des classes de fonctions convenables.

On suppose ici  $F$  de la forme (3.4), et  $\bar{F}$  d'une forme identique en rempla"cant  $\ell, f, a$  par  $\bar{\ell}, \bar{f}, \bar{a}$ .

**Lemme 3.19** *On suppose les fonctions  $(\ell, f, a)$  et  $(\bar{\ell}, \bar{f}, \bar{a})$  lipschitziennes et born"ees. Alors (3.44)-(3.45) est satisfait avec  $\mu = 1$ ,  $K_1 = K_1(L_\ell, L_f, L_\sigma)$  et*

$$\eta_1 := \sup(\bar{\ell} - \ell), \quad \eta_2 := \|f - \bar{f}\| + \|\sigma - \bar{\sigma}\|. \quad (3.53)$$

*En cons"equence, soit  $v$  sous solution de (3.1) pour  $F = \bar{F}$ , s.c.s. et major"ee, et  $w$  sur solution de (3.1), s.c.i. et minor"ee, une de ces deux fonction "etant h"olderienne de constantes  $C_0 > 0$ ,  $\mu_0 \in ]0, 1]$ . Alors il existe  $C > 0$  d"ependant de  $C_0 > 0$ ,  $\mu_0$  et des constantes de Lipschitz de  $(\ell, f, a, \bar{\ell}, \bar{f}, \bar{a})$  tel que*

$$\lambda \sup(v - w) \leq \sup(\bar{\ell} - \ell) + C(\|f - \bar{f}\| + \|\sigma - \bar{\sigma}\|)^{\mu_0}. \quad (3.54)$$

**Proof.** La v"erification de (3.44) est imm"ediate. Posons  $p_0 := \alpha(x - y)$ . Il vient, utilisant (3.43) pour le terme  $\Delta_3$ ,

$$\Delta := F(y, r, p_0 - \varepsilon y, Y) - \bar{F}(x, r, p_0 + \varepsilon x, X) \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad (3.55)$$

avec

$$\Delta_1 := \sup_u (\bar{\ell}(x, u) - \ell(y, u)) \leq L_\ell |x - y| + \sup(\bar{\ell} - \ell), \quad (3.56)$$

$$\Delta_2 := \sup_u ((p_0 + \varepsilon x) \cdot \bar{f}(x, u) - (p_0 - \varepsilon y) \cdot f(y, u)) \quad (3.57)$$

$$\leq \sup_u (p_0 \cdot (\bar{f}(x, u) - f(y, u)) + \varepsilon(|x| + |y|)(\|f\| + \|\bar{f}\|)) \quad (3.58)$$

$$\leq \alpha L_f |x - y|^2 + \alpha |x - y| \|f - \bar{f}\| + \varepsilon(|x| + |y|)(\|f\| + \|\bar{f}\|), \quad (3.59)$$

$$\leq \alpha(L_f + \frac{1}{2})|x - y|^2 + \alpha \|f - \bar{f}\|^2 + \varepsilon(|x| + |y|)(\|f\| + \|\bar{f}\|), \quad (3.60)$$

$$\Delta_3 := \sup_u (\bar{a}(x, u) \circ X - a(y, u) \circ Y) \quad (3.61)$$

$$\leq \frac{1}{2} \alpha \sup_u (\bar{\sigma}(x, u) - \sigma(y, u)) \circ (\bar{\sigma}(x, u) - \sigma(y, u)) \quad (3.62)$$

$$+ 2\varepsilon(\|a\| + \|\bar{a}\|) \quad (3.63)$$

$$\leq \alpha(L_\sigma^2 |x - y|^2 + \|\sigma - \bar{\sigma}\|^2) + 2\varepsilon(\|a\| + \|\bar{a}\|). \quad (3.64)$$

On v"erifie (3.45) en combinant les estimations ci-dessus. L'estimation (3.54) est alors cons"equence imm"ediate du principe d'unicit"e fort (th"eor"eme 3.17).  $\blacksquare$

## 3.2 Estimations d'erreur

Les principales difficultés dans l'analyse des estimations d'erreur sont présentes en dimension 1. Nous nous restreindrons donc dans la suite à ce cas.

### 3.2.1 Immersion du schéma dans $\mathbb{R}^n$

Rappelons l'équation HJB du contrôle stochastique en dimension 1 :

$$\lambda V(x) = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x, u) + f(x, u)DV(x) + a(x, u)D^2V(x) \right\}. \quad (3.65)$$

On notera dans cette section  $h > 0$  le pas d'espace. Le schéma utilisant (quand cela est possible) les différences finies *centrées* a pour expression :

$$\lambda v_j = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x_j, u) + f(x_j, u) \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2h} + a(x_j, u) \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.66)$$

On peut plonger ce schéma dans le problème suivant :

$$\lambda v(x) = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x, u) + f(x, u) \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} + a(x, u) \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.67)$$

On note que (3.67) se décompose en problèmes indépendants sur les grilles  $\nu + h\mathbb{Z}$ , avec  $\nu \in [0, h[$ ; en particulier si  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $v(jh) = v_j$ . On va écrire (3.66) sous une forme plus compacte en notant les opérateurs de différence finies par

$$\begin{aligned} \delta_h^+ v(x) &:= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} & \delta_h^- v(x) &:= \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \\ \delta_h v(x) &:= \frac{1}{2} (\delta_h^+ v(x) + \delta_h^- v(x)), \\ \Delta_h v(x) &:= \frac{\delta_h^+ v(x) - \delta_h^- v(x)}{h} = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

On peut alors réécrire (3.67) comme

$$\lambda v(x) = \inf_{u \in U} \left\{ \ell(x, u) + f(x, u) \delta_h v(x) + a(x, u) \Delta_h v(x) \right\}. \quad (3.69)$$

Multipliant les deux membres par un pas de temps fictif  $h_0$ , ajoutant  $v_j$  à chaque membre, et posant

$$\beta := (1 + h_0 \lambda)^{-1}; \quad f_h(x, u) := \frac{1}{2} h_0 f(x, u) / h; \quad a_h(x, u) := h_0 a(x, u) / h^2,$$

il vient

$$\begin{aligned} v(x) = \beta \inf_{u \in U} \{ & h_0 \ell(x, u) + (a_h(x, u) - f_h(x, u)) v(x-h) \\ & + (1 - 2a_h(x, u)) v(x) + (a_h(x, u) + f_h(x, u)) v(x+h) \}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ceci s'interprète comme le principe de programmation dynamique d'une chaîne de Markov si les coefficients des  $v_i$  sont positifs, ce qui est le cas si

$$(i) \quad h_0 \|a\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^2; \quad (ii) \quad a(x, u) \geq \frac{1}{2} h |f(x, u)|, \quad \text{pour tout } x, u. \quad (3.71)$$

**Remarque 3.20** La condition de monotonie (3.71)(ii) est satisfaite, dans le cas fortement elliptique, autrement dit si

$$\exists \theta > 0; \quad a(x, u) \succeq \theta, \text{ pour tout } (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U, \quad (3.72)$$

dès que  $h \leq 2\theta/\|f\|$ .

De la même manière, on peut plonger le schéma décentré dans le problème

$$\lambda v(x) = \inf_{u \in U} \{ \ell(x, u) + f(x, u)_+ \delta_h^+ v(x) + f(x, u)_- \delta_h^- v(x) + a(x, u) \Delta_h v(x) \}, \quad (3.73)$$

et la forme de point fixe associée est

$$v(x) = \beta \inf_{u \in U} \{ h_0 \ell(x, u) + (a_h(x, u) - f_h(x, u)_-) v(x - h) + (1 - 2a_h(x, u)) v(x) + (a_h(x, u) + f_h(x, u)_+) v(x + h) \}. \quad (3.74)$$

Ceci s'interprète comme le principe de programmation dynamique d'une chaîne de Markov si les coefficients des  $v_i$  sont positifs, ce qui est le cas si (3.71)(i) est satisfait.

### 3.2.2 Cas de solutions lisses

Dans le cas de solutions lisses de l'équation HJB on obtient facilement des estimations d'erreur basées sur la consistance et la monotonie du schéma. Pour ceci, interprétons la solution de l'équation HJB (3.65) comme la solution d'une perturbation de l'équation du schéma centré (3.67) ou décentré (3.73) pour obtenir une estimation d'erreur. En effet, notons  $r_1(x)$  et  $r_2(x)$  les erreurs d'approximation des dérivées par le schéma (en bref *erreurs de schéma*; elles seront évaluées de manière plus précise ultérieurement) :

$$\delta_h V(x) = DV(x) + r_1(x); \quad \Delta_h V(x) = D^2V(x) + r_2(x). \quad (3.75)$$

Alors la fonction  $V$  est solution du schéma centré perturbé

$$\lambda \hat{v}(x) = \inf_{u \in U} \left\{ \hat{\ell}(x, u) + f(x, u) \delta_h \hat{v}(x) + a(x, u) \Delta_h \hat{v}(x) \right\}, \quad (3.76)$$

avec

$$\hat{\ell}(x, u) := \ell(x, u) - r_1(x) f(x, u) - r_2(x) a(x, u). \quad (3.77)$$

Combinant avec le lemme 1.6 (dans le cas  $M' = M$ ) on obtient l'estimation d'erreur avec la solution du schéma centré

$$\lambda |V(x) - v^h(x)| \leq \|\hat{\ell} - \ell\|_\infty \leq \|r_1\|_\infty \|f\|_\infty + \|r_2\|_\infty \|a\|_\infty, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.78)$$

De la même manière, définissant les erreurs d'approximation décentrées

$$\delta_h^+ V(x) = DV(x) + r_{1+}(x), \quad \delta_h^- V(x) = DV(x) + r_{1-}(x); \quad (3.79)$$

on obtient l'estimation d'erreur avec la solution du schéma décentré

$$\lambda \|V - v^h\|_\infty \leq \|r_{1+}\|_\infty \|f_+\|_\infty + \|r_{1-}\|_\infty \|f_-\|_\infty + \|r_2\|_\infty \|a\|_\infty. \quad (3.80)$$

On obtient des estimations plus explicites suivant la régularité de  $V$ . On rappelle la formule du développement de Taylor avec reste intégral, valable si  $V$  est de classe  $C^k$  :

$$V(x+e) = V(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} V^{(k-1)}(x) e^{k-1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} V^{(k)}(x+te) e^k dt. \quad (3.81)$$

Notons  $(C_i, \mu_i)$  des constantes de Hölder pour  $V^{(i)}$ ,  $i \leq k$ . Utilisant (3.81) pour  $k = 1$  puis 2, il vient

$$\begin{aligned} r_{1+}(x) &= \int_0^1 (DV(x+th) - DV(x)) dt \\ r_1(x) &= \frac{1}{2}h \int_0^1 (1-t) (D^2V(x+th) - D^2V(x-th)) dt \end{aligned} \quad (3.82)$$

donc (nous ne cherchons pas les constantes optimales)

$$|r_{1+}(x)| \leq C_1 h^{\mu_1}; \quad |r_{1-}(x)| \leq C_1 h^{\mu_1}; \quad |r_1(x)| \leq C_2 h^{1+\mu_2}. \quad (3.83)$$

Utilisant (3.81) pour  $k = 3$ , on obtient

$$r_2(x) = h \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} [V^{(3)}(x+th) - V^{(3)}(x-th)] dt \quad (3.84)$$

et donc

$$|r_2(x)| \leq \frac{1}{3!} C_3 2^{\mu_3} h^{1+\mu_3} \leq C_3 h^{1+\mu_3}. \quad (3.85)$$

On aboutit au résultat suivant :

**Lemme 3.21** *Soient  $V$  et  $v^h$  les solutions de (3.65) et (3.66) respectivement. On suppose  $V$  assez régulière pour que les estimations ci-dessous aient un sens. Alors (i) si la condition de monotonie (3.71) est satisfaite, on a*

$$\lambda \|V - v^h\|_\infty \leq C_2 \|f\|_\infty h^{1+\mu_2} + C_3 \|a\|_\infty h^{1+\mu_3}. \quad (3.86)$$

(ii) *Pour le schéma décentré, on a l'estimation suivante :*

$$\lambda \|V - v^h\|_\infty \leq C_1 \|f\|_\infty h^{\mu_1} + C_3 \|a\|_\infty h^{1+\mu_3}. \quad (3.87)$$

*En particulier, si  $V$  est assez régulière, l'erreur est d'ordre  $h$  pour le schéma décentré, et d'ordre  $h^2$  pour le schéma centré.*

**Remarque 3.22** Pour l'estimation de  $r_2(x)$  on aurait pu aussi se baser sur le développement de Taylor à l'ordre 4, qui donne  $|r_2(x)| \leq h^2 \|V^{(4)}\|_\infty$ , d'où les estimations d'erreur pour les schémas centré et décentré, respectivement :

$$\begin{aligned} \lambda \|V - v^h\|_\infty &\leq C_2 \|f\|_\infty h^{1+\mu_2} + \|a\|_\infty \|V^{(4)}\|_\infty h^2, \\ \lambda \|V - v^h\|_\infty &\leq C_1 \|f\|_\infty h^{\mu_1} + \|a\|_\infty \|V^{(4)}\|_\infty h^2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

### 3.2.3 Un procédé général

Les estimations précédentes sont en général inutilisables, car elles nécessitent une forte régularité (dérivée troisième hölderienne) de la solution  $V$  de l'équation HJB, alors que celle-ci est typiquement seulement lipschitzienne ou même hölderienne.

Elles suggèrent néanmoins le procédé suivant. Supposons possible la construction, pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'une *sous solution* régulière  $V^\varepsilon$ , qui vérifie  $V^\varepsilon \leq V$  sous les hypothèses du lemme 3.19. Notant  $c(\varepsilon) := \|V - V^\varepsilon\|_\infty$ , il vient

$$V(x) - c(\varepsilon) \leq V^\varepsilon(x) \leq V(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (3.89)$$

Utilisant les arguments de la section précédente, on vérifie que  $V^\varepsilon(x)$  est sous-solution du schéma perturbé, obtenu en changeant  $\ell$  en

$$\ell^\varepsilon(x, u) := \ell(x, u) - r_{1\varepsilon}(x)f(x, u) - r_{2\varepsilon}(x)a(x, u). \quad (3.90)$$

où  $r_{1\varepsilon}$  et  $r_{2\varepsilon}(x)$  sont les erreurs de schéma pour la fonction  $V^\varepsilon(x)$ , de constantes de Hölder ( $C_{k\varepsilon}, \mu_{k\varepsilon}$ ) à l'ordre  $k$ , soit (comparer à (3.83)-(3.83)) :

$$|r_{1\varepsilon+}(x)| \leq C_{1\varepsilon}h^{\mu_{1\varepsilon}}; \quad |r_{1\varepsilon-}(x)| \leq C_{1\varepsilon}h^{\mu_{1\varepsilon}}; \quad |r_{1\varepsilon}(x)| \leq C_{2\varepsilon}h^{1+\mu_{2\varepsilon}}. \quad (3.91)$$

$$|r_{2\varepsilon}(x)| \leq \frac{1}{3!}C_{3\varepsilon}(2h)^{1+\mu_{3\varepsilon}} \leq C_{3\varepsilon}h^{1+\mu_{3\varepsilon}}. \quad (3.92)$$

On en déduit le

**Lemme 3.23** *On a pour le schéma centré, si la condition de monotonie (3.71) est satisfaite :*

$$\lambda \sup(V - v^h) \leq c(\varepsilon) + C_{2\varepsilon}\|f\|_\infty h^{1+\mu_{2\varepsilon}} + C_{3\varepsilon}\|a\|_\infty h^{1+\mu_{3\varepsilon}}, \quad (3.93)$$

*et pour le schéma décentré*

$$\lambda \sup(V - v^h) \leq c(\varepsilon) + C_{1\varepsilon}\|f\|_\infty h^{\mu_{1\varepsilon}} + C_{3\varepsilon}\|a\|_\infty h^{1+\mu_{3\varepsilon}}. \quad (3.94)$$

**Proof.** On donne l'argument dans le cas du schéma centré. Notons  $v_{h\varepsilon}$  la solution du schéma avec la fonction de coût  $\ell^\varepsilon(x, u)$ . Comme le schéma est monotone, on a

$$V(x) - c(\varepsilon) \leq V^\varepsilon(x) \leq v_{h\varepsilon} \leq v_h + \frac{1}{\lambda}\|\ell^\varepsilon - \ell\|_\infty, \quad (3.95)$$

la dernière inégalité résultant du lemme 1.6. ■

Le même argument permettrait d'obtenir des majorations de la solution du schéma si on savait construire des majorants réguliers de  $V$ . De plus, il est symétrique dans le sens où, si on sait construire des minorants ou majorants réguliers de la solution du schéma, on en déduit de manière similaire des majorants ou minorants de la solution de l'équation HJB. Toute la question est maintenant de construire ces minorants ou majorants.

### 3.2.4 Minoration

Nos allons donner une minoration de la solution  $v^h$  du schéma discret (décentré ou non). Pour cela nous allons construire une sous solution régulière de l'équation HJB, puis appliquer les résultats de la section précédente. On pose

$$L_u[v](x) := \ell(x, u) + f(x, u) \cdot Dv(x) + a(x, u) \circ D^2v(x). \quad (3.96)$$

L'équation (HJB) s'écrit  $\lambda v(x) = \inf_{u \in U} L_u[v](x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Introduisons le procédé de Krylov [27], qui consiste à perturber cette équation de la manière suivante :

$$\lambda v^\varepsilon(x) = \inf_{u \in U, |e| \leq 1} L_u[v](x - \varepsilon e), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.97)$$

avec  $\varepsilon \geq 0$  et  $e \in \mathbb{R}^n$ . On peut voir (3.97) comme l'équation HJB d'un problème de contrôle stochastique dans lequel la commande est  $(u, e) \in U \times \bar{B}(0, 1)$ . Il a donc une solution unique  $V^\varepsilon$ , qui vérifie  $V^0 = V$ . En raison du théorème 3.17 combiné au lemme 3.19, si  $V$  est hölderienne de constante  $\mu_0 \in ]0, 1]$ , et si  $\ell, f, a$  sont uniformément lipschitziennes par rapport à  $x$ , il existe  $C > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que

$$\|V - V^\varepsilon\|_\infty \leq C\varepsilon^{\mu_0}. \quad (3.98)$$

Reprenons le procédé de régularisation par convolution avec un noyau régularisant défini en (3.18)-(3.19). La fonction  $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$ , est à support dans  $\bar{B}(0, \varepsilon)$  et de masse unité. Si  $w$  est hölderienne de constantes  $(C_w, \mu_{0w}) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, 1]$ , on vérifie facilement que sa régularisée  $w_\varepsilon(x) := w * \rho_\varepsilon(x)$  est aussi hölderienne avec les mêmes constantes  $(C_w, \mu_{0w})$ . De plus  $w_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$  et vérifie

$$\|w_\varepsilon - w\|_\infty \leq C_w \varepsilon^{\mu_{0w}}; \quad D^k w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w(y) D^k \rho_\varepsilon(x - y) dy. \quad (3.99)$$

Comme  $\|D^k \rho_\varepsilon\|_\infty \leq \|\rho\|_\infty \varepsilon^{-n-k}$ , ceci implique, pour certaines constantes  $c_k > 0$  indépendant de  $w$  :

$$\|D^k w_\varepsilon\|_\infty \leq c_k C_w \varepsilon^{-k}; \quad |D^k w_\varepsilon(x') - D^k w_\varepsilon(x)| \leq c_k C_w |x' - x|^{\mu_{0w}} \varepsilon^{-k}. \quad (3.100)$$

On pose  $V_\varepsilon := V^\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)$ . D'après la discussion précédente, notant  $(C, \mu_0)$  les constantes de Hölder de  $V$ , on a

$$\|V_\varepsilon - V^\varepsilon\|_\infty \leq C\varepsilon^{\mu_0}; \quad (3.101)$$

On va montrer que la fonction  $V_\varepsilon$  est sous solution de (3.97) (lemme 3.25). Pour cela une résultat qui a son propre intérêt est le

**Lemme 3.24** *L'ensemble des sous solutions continues du problème standard de contrôle stochastique (2.7) est convexe.*

**Proof.** a) Soient  $v_1$  et  $v_2$  sous solution continues de (2.7),  $\beta \in ]0, 1[$ , et posons  $\beta' := 1 - \beta$ ,  $v := \beta v_1 + \beta' v_2$ . Il s'agit de montrer que  $v$  est sous solution.



b) Pour motiver ce qui suit, traitons d'abord le cas où  $v_1$  et  $v_2$  sont sous solution classiques. Utilisant la convexité de  $F(x, \cdot, \cdot, \cdot)$  par rapport à  $(r, p, Q)$ , on obtient

$$F(x, v(x), Dv(x), D^2v(x)) \leq \beta F(x, v_1(x), Dv_1(x), D^2v_1(x)) + \beta' F(x, v_2(x), Dv_2(x), D^2v_2(x)) \leq 0. \quad (3.102)$$

On conclut avec la remarque 3.2.

c) Dans le cas général, soit  $\chi$  de classe  $C^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $v - \chi$  a un maximum local en un point  $\bar{x}$ . Changeant  $\chi(x)$  en  $\chi_K(x) := \chi(x) + K|x - \bar{x}|^4$ , si nécessaire, avec  $K$  assez grand, on peut supposer que  $v - \chi$  a un maximum local strict en  $\bar{x}$  sur la boule  $\bar{B}(\bar{x}, 1)$ . Comme  $\chi$  et  $\chi_K$  ont même dérivées première et seconde en  $\bar{x}$ , cette transformation ne change pas la condition de sous solution.

Notons  $\Psi_\alpha(x, y) := \beta v_1(x) + \beta' v_2(y) - \beta \chi(x) - \beta' \chi(y) - \frac{1}{2} \alpha |x - y|^2$ , avec  $\alpha > 0$ . On vérifie facilement que, quand  $\alpha \uparrow \infty$ , la fonction  $\Psi_\alpha$  atteint son maximum sur  $\bar{B}(\bar{x}, 1) \times \bar{B}(\bar{x}, 1)$  en (au moins) un point  $(x_\alpha, y_\alpha)$  tel que

$$x_\alpha \rightarrow \bar{x}, \quad y_\alpha \rightarrow \bar{x}, \quad \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 \rightarrow 0. \quad (3.103)$$

Donc pour  $\alpha$  assez grand,  $(x_\alpha, y_\alpha) \in B(\bar{x}, 1) \times B(\bar{x}, 1)$ . Appliquons le lemme d'Ishii 3.12. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{S}^n$  tels que, posant  $p_\alpha = \alpha(x_\alpha - y_\alpha)$ ,

$$\begin{cases} (p_\alpha + \beta D\chi(x_\alpha), X) & \in \bar{J}^{2,+}[\beta v_1(x_\alpha)], \\ (-p_\alpha + \beta' D\chi(y_\alpha), Y) & \in \bar{J}^{2,+}[\beta' v_2(y_\alpha)], \end{cases} \quad (3.104)$$

et

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \preceq A + \varepsilon A^2, \quad \text{où } A := \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta D^2\chi(x_\alpha) & 0 \\ 0 & \beta' D^2\chi(y_\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

Effectuant le produit scalaire (de Frobenius) des deux membres par par la matrice semi-définie positive  $\begin{pmatrix} \sigma(x_\alpha, u)\sigma(x_\alpha, u)^\top & \sigma(x_\alpha, u)\sigma(y_\alpha, u)^\top \\ \sigma(y_\alpha, u)\sigma(x_\alpha, u)^\top & \sigma(y_\alpha, u)\sigma(y_\alpha, u)^\top \end{pmatrix}$ , et prenant  $\varepsilon = 1/\alpha^3$ , il vient (utilisant (3.103) pour la dernière inégalité)

$$\begin{aligned} a(x_\alpha, u) \circ X + a(y_\alpha, u) \circ Y &\leq \alpha(\sigma(x_\alpha, u) - \sigma(y_\alpha, u)) \circ (\sigma(x_\alpha, u) - \sigma(y_\alpha, u)) \\ &\quad + \beta a(x_\alpha, u) \circ D^2\chi(x_\alpha) + \beta' a(y_\alpha, u) \circ D^2\chi(y_\alpha) \\ &\quad + o(1) \\ &\leq C\alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 + a(\bar{x}, u) \circ D^2\chi(\bar{x}) + o(1) \\ &= a(\bar{x}, u) \circ D^2\chi(\bar{x}) + o(1). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Utilisons maintenant le fait que  $v_1$  et  $v_2$  sont sous solutions. Comme  $\bar{J}^{2,+}[\gamma w(\cdot)] = \gamma \bar{J}^{2,+}w(\cdot)$ , (3.104) implique

$$\begin{cases} (\beta^{-1}p_\alpha + D\chi(x_\alpha), \beta^{-1}X) & \in \bar{J}^{2,+}v_1(x_\alpha), \\ (-\beta'^{-1}p_\alpha + D\chi(y_\alpha), \beta'^{-1}Y) & \in \bar{J}^{2,+}v_2(y_\alpha). \end{cases} \quad (3.107)$$

Pour tout  $u \in U$ , on a donc (multipliant par  $\beta$  et  $\beta'$  les relations correspondantes)

$$\begin{cases} \beta \lambda v_1(x_\alpha) & \leq \beta \ell(x_\alpha, u) + (p_\alpha + \beta D\chi(x_\alpha)) \cdot f(x_\alpha, u) + a(x_\alpha, u) \circ X, \\ \beta' \lambda v_2(y_\alpha) & \leq \beta' \ell(y_\alpha, u) + (-p_\alpha + \beta' D\chi(y_\alpha)) \cdot f(y_\alpha, u) + a(y_\alpha, u) \circ Y. \end{cases} \quad (3.108)$$

Additionnant ces inégalités, et utilisant (3.103) et (3.106), il vient

$$\lambda v(\bar{x}) \leq \ell(\bar{x}, u) + D\chi(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}, u) + a(\bar{x}, u) \circ D^2\chi(\bar{x}) + o(1). \quad (3.109)$$

Passant à la limite (ce qui supprime le terme  $o(1)$ ) et minimisant par rapport à  $u \in U$  on obtient la relation caractérisant  $v$  comme sous solution. ■

**Lemme 3.25** *La fonction  $V_\varepsilon$  est sous solution de (3.97).*

**Proof.** D'après le lemme 3.24, l'ensemble des sous solutions continues de l'équation (3.97) est convexe (puisque (3.97) s'interprète comme l'équation HJB d'un problème standard de contrôle stochastique).

On peut discrétiser l'intégrale  $V^\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)$  de la manière suivante. Soient  $\delta > 0$ ,  $Q_\delta^\varepsilon := e + [-\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta]^n$ ,  $\bar{\rho}_\varepsilon(e, \delta) := \int_{Q_\delta^\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) dy$ , et  $I_\delta(x) := \sum_{e \in \mathbb{Z}^n} V^\varepsilon(x - \delta e) \bar{\rho}_\varepsilon(e, \delta)$ . Alors  $V_\varepsilon(x) := V^\varepsilon * \rho_\varepsilon(x)$  est limite uniforme sur les compacts de  $I_\delta(x)$ . D'après le point (b),  $V_\varepsilon$  est donc limite uniforme sur les compacts de sous solutions de 2.7. On conclut avec la remarque 3.4. ■

On note

$$\lambda_0 := \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\|\sigma(x, u) - \sigma(y, u)\|^2}{|x - y|^2} + \frac{(f(x, u) - f(y, u)) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right\} \quad (3.110)$$

On a bien évidemment  $\lambda_0 \leq \frac{1}{2}(L_\sigma)^2 + L_f$ . On note  $C^{0,\mu}$  l'espace des fonctions bornées hölderiennes de constante  $\mu$ .

**Théorème 3.26** *L'équation HJB du problème de commande optimale stochastique a une solution unique  $V \in C^{0,\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\mu_0 = \lambda/\lambda_0$  si  $\lambda < \lambda_0$ ,  $\mu_0$  arbitraire dans  $]0, 1[$  si  $\lambda = \lambda_0$ , et  $\mu_0 = 1$  si  $\lambda > \lambda_0$ . De plus la constante  $C_{\mu_0}$  est uniformément bornée si  $\ell, f, \sigma$  le sont dans  $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Proof.** Nous admettons ce résultat ; voir Barles et Jakobsen [4, Thm 2.2], P.-L. Lions [30, Thm 2.3]. Une extension à des équations plus générales se trouve dans Jakobsen et Karlsen [25, Appendix]. ■

**Théorème 3.27** *Soit  $V$  hölderienne de constante  $\mu_0$ , (avec  $\mu_0$  fourni par exemple par le théorème 3.26. Soit  $v^h$  la solution du schéma décentré (3.73), ce dernier vérifiant la condition de stabilité (3.71)(ii). Alors on a la minoration de  $v^h$  suivante :*

$$\sup (V - v^h) \leq Ch^\beta, \quad \text{avec } \beta = \mu_0^2/(1 + \mu_0). \quad (3.111)$$

En particulier, si  $\mu_0 = 1$ , alors  $\sup (V - v^h) \leq O(h^{1/2})$ .

**Proof.** On applique le lemme 3.23 avec la sous-solution  $V_\varepsilon$  construite dans la section précédente. La relation (3.98) donne  $c(\varepsilon) = C\varepsilon^{\mu_0}$ , et avec (3.100) on obtient  $\mu_k = \mu_0$

et  $C_{k\varepsilon} = C\varepsilon^{-k}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Le lemme 3.23 implique donc pour le schéma décentré

$$\lambda \sup(V - v^h) \leq C \left( \varepsilon^{\mu_0} + \frac{h^{\mu_0}}{\varepsilon} + \frac{h^{1+\mu_0}}{\varepsilon^3} \right) = C \left( \varepsilon^{\mu_0} + \frac{h^{\mu_0}}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{h}{\varepsilon^2} \right) \right). \quad (3.112)$$

Or la fonction  $\varepsilon \mapsto \varepsilon^{\mu_0} + h^{\mu_0}/\varepsilon$  atteint son minimum en  $\varepsilon_h = h^{\mu_0/(1+\mu_0)}$ ; comme  $h/\varepsilon_h^2 \leq O(1)$ , l'ordre de grandeur du minimum du membre de droite de (3.112) est atteint pour  $\varepsilon_h$ . Alors (3.111) découle de

$$\varepsilon_h^{\mu_0} = h^{\mu_0^2/(1+\mu_0)}; \quad \frac{h^{\mu_0}}{\varepsilon_h} = h^{\mu_0^2/(1+\mu_0)}; \quad (3.113)$$

■

**Remarque 3.28** Si  $\lambda > \lambda_0$  on a  $\mu_0 = 1$ , donc une majoration de  $V - v^h$  en  $O(h^{1/2})$ . Ce résultat est a priori le meilleur possible, dans la mesure où dans le cas de la commande optimale déterministe l'ordre d'erreur (des deux côtés) est  $O(h^{1/2})$ ; voir Capuzzo Dolcetta et Ishii [20].

### 3.2.5 Majoration de la solution du schéma

Dans cette approche on applique le procédé de Krylov au schéma numérique de manière à produire une sous solution du schéma sur un voisinage. Régularisant par convolution et utilisant la condition de consistance on obtient une sous solution approchée de l'équation HJB, ce qui donne une majoration de  $V - v^h$ . Les arguments sont identiques à ceux de la minoration et il est donc inutile de les répéter. Il suffit d'explicitier le procédé de Krylov appliqué au schéma. On pose  $\hat{U} := U \times \bar{B}(0, 1)$  (boule fermée euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ ) d'élément  $\hat{u} = (u, e)$ , et, pour  $\varepsilon > 0$

$$\hat{\ell}(x, \hat{u}) := \ell(x + e, u); \quad \hat{f}(x, \hat{u}) := f(x + e, u); \quad \hat{a}(x, \hat{u}) := a(x + e, u). \quad (3.114)$$

Le schéma perturbé s'écrit

$$\lambda v(x) = \inf_{\hat{u} \in \hat{U}} \left\{ \hat{\ell}(x, \hat{u}) + \hat{f}(x, \hat{u})_+ \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \hat{f}(x, \hat{u})_- \frac{v(x) - v(x-h)}{h} + \hat{a}(x, \hat{u}) \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2} \right\}. \quad (3.115)$$

On obtient donc le résultat symétrique de celui du théorème 3.27 :

**Théorème 3.29** *On suppose la solution  $v^h$  du schéma décentré hölderienne de constante  $\mu'_0$ . Alors on a la majoration de  $v^h$  suivante :*

$$\sup(v^h - V) \leq Ch^\beta, \quad \text{avec } \beta = (\mu'_0)^2/(1 + \mu'_0). \quad (3.116)$$

En particulier, si  $\mu'_0 = 1$ , alors  $\sup(v^h - V) \leq O(h^{1/2})$ .

**Remarque 3.30** Le point délicat reste l'obtention de résultats de régularité sur la solution du schéma permettant l'application du théorème 3.29. La référence clé est Krylov [26] dans lequel, pour  $\lambda > 0$  assez grand, on prouve (moyennant des calculs assez techniques) que la solution du schéma est lipschitzienne (uniformément en  $h$ ). Les estimations de type Hölder pour  $\lambda$  petit restent ouvertes.

### 3.3 Algorithme semi lagrangien

#### 3.3.1 Principe

On note  $\sigma_s(x, u)$  la colonne d'indice  $s$  de la matrice  $\sigma(x, u)$ . On considère l'algorithme dit semi lagrangien suivant, qui peut s'interpréter comme une discrétisation du principe de programmation dynamique, posant  $\beta := (1 + \lambda h_0)^{-1}$  :

$$v^{h_0}(x) := \beta \inf_{u \in U} \left( h_0 \ell(x, u) + \frac{1}{2r} \sum_{s=1}^r [v^{h_0}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)) + v^{h_0}(x + h_0 f(x, u) - \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u))] \right). \quad (3.117)$$

Ce schéma s'interprète comme un principe de programmation dynamique et correspond à un opérateur de point fixe contractant pour la norme uniforme, dans l'espace des fonctions continues et bornées. Il a donc une solution unique, continues et bornée, qui satisfait

$$\|v^{h_0}\|_\infty \leq \frac{\|\ell\|_\infty}{\lambda}. \quad (3.118)$$

Notons la forme équivalente, plus proche de l'équation HJB, obtenue en réécrivons le schéma sous la forme (on multiplie (3.117) par  $\beta$ , on retranche  $v^{h_0}(x)$  à chaque membre et on simplifie par  $h_0$ ) :

$$\lambda v^{h_0}(x) := \inf_{u \in U} \left( \ell(x, u) + \frac{1}{2h_0 r} \sum_{s=1}^r [v^{h_0}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)) - 2v^{h_0}(x) + v^{h_0}(x + h_0 f(x, u) - \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u))] \right). \quad (3.119)$$

Nous allons donner une estimation d'erreur basée encore sur l'idée de perturbation des coefficients de Krylov, permettant de construire des sous-solutions régulières de l'équation HJB et du schéma numérique. Pour cela il faut assurer la régularité de la solution du schéma. C'est l'objet de la section suivante. Les calculs étant similaires à ceux menés pour l'estimation d'erreur de la méthode de différences finies, nous ne donnerons pas tous les détails.

#### 3.3.2 Stabilité de la solution du schéma

On considère un problème perturbé de données  $\bar{\ell}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{\sigma}$ , lipschitziennes et bornées. On note  $\bar{v}^{h_0}$  la solution du schéma semi lagrangien associé. On note

$$\lambda_{00} := \sup_{u, x, y} \frac{(f(x, u) - f(y, u), x - y)}{|x - y|^2}; \quad \lambda_0 := L_\sigma^2 + \lambda_{00}. \quad (3.120)$$

**Proposition 3.31** *Si  $\lambda > \lambda_0$ , alors il existe  $C > 0$  dépendant des constantes de Lipschitz de  $\ell$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_0$  tel que, pour  $h_0$  assez petit, on a*

$$\|v^{h_0}(x) - \bar{v}^{h_0}(y)\|_\infty \leq C (|x - y| + \|\ell - \bar{\ell}\|_\infty + \|f - \bar{f}\|_\infty + \|\sigma - \bar{\sigma}\|_\infty). \quad (3.121)$$

**Proof.** On omet la notation  $\infty$  pour les normes. Etant donnés  $\alpha > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , posons

$$\phi(x, y) := \alpha|x - y|^2 + \varepsilon(|x|^2 + |y|^2). \quad (3.122)$$

La fonction  $\psi(x, y) := v^{h_0}(x) - \bar{v}^{h_0}(y) - \phi(x, y)$  est continue, majorée et ses suites maximisantes sont bornées. Elle atteint donc son maximum en un point  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Pour tout  $(x', y')$ , on a

$$v^{h_0}(x') - \bar{v}^{h_0}(y') = \phi(x', y') + \psi(x', y') \leq \phi(x', y') + \psi(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.123)$$

avec égalité si  $(x', y') = (\bar{x}, \bar{y})$ , et donc

$$\begin{aligned} A &:= v^{h_0}(\bar{x} + b + a) - 2v^{h_0}(\bar{x}) + v^{h_0}(\bar{x} + b - a) \\ &\quad - (\bar{v}^{h_0}(\bar{y} + \bar{b} + \bar{a}) - 2\bar{v}^{h_0}(\bar{y}) + \bar{v}^{h_0}(\bar{y} + \bar{b} - \bar{a})) \\ &\leq \phi(\bar{x} + b + a, \bar{y} + \bar{b} + \bar{a}) - 2\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \phi(\bar{x} + b - a, \bar{y} + \bar{b} - \bar{a}) \\ &= 2\alpha (|a - \bar{a}|^2 + |b - \bar{b}|^2 + 2(\bar{x} - \bar{y}) \cdot (b - \bar{b})) + o(1). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Soit  $\bar{u} \in U$  atteignant le minimum dans la définition de  $\bar{v}^{h_0}(\bar{y})$ . Faisant la différence entre (3.117) écrit en  $\bar{x}$  et la relation correspondante pour  $\bar{v}^{h_0}(\bar{y})$ , il vient après division par  $\beta$  et notant  $\Delta v := v^{h_0}(\bar{x}) - \bar{v}^{h_0}(\bar{y})$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \Delta v &\leq h_0 \ell(\bar{x}, \bar{u}) - h_0 \bar{\ell}(\bar{y}, \bar{u}) \\ &+ \frac{1}{2r} \sum_{s=1}^r (v^{h_0}(\bar{x} + h_0 f(\bar{x}, \bar{u}) \pm \sqrt{h_0} \sigma_s(\bar{x}, \bar{u})) - \bar{v}^{h_0}(\bar{y} + h_0 \bar{f}(\bar{y}, \bar{u}) \pm \sqrt{h_0} \bar{\sigma}_s(\bar{y}, \bar{u}))). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Retranchant  $v^{h_0}(\bar{x}) - \bar{v}^{h_0}(\bar{y})$  à chaque membre et utilisant  $1 - \beta = \beta \lambda h_0$ , il vient

$$\begin{aligned} \lambda h_0 \Delta v &\leq h_0 \ell(\bar{x}, \bar{u}) - h_0 \bar{\ell}(\bar{y}, \bar{u}) \\ &+ \frac{1}{2r} \sum_{s=1}^r (v^{h_0}(\bar{x} + h_0 f(\bar{x}, \bar{u}) \pm \sqrt{h_0} \sigma_s(\bar{x}, \bar{u})) - 2v^{h_0}(\bar{x}) \\ &+ 2\bar{v}^{h_0}(\bar{y}) - \bar{v}^{h_0}(\bar{y} + h_0 \bar{f}(\bar{y}, \bar{u}) \pm \sqrt{h_0} \bar{\sigma}_s(\bar{y}, \bar{u}))). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Appliquons (3.124) au membre de droite, avec

$$b := h_0 f(\bar{x}, \bar{u}); \quad a := \sqrt{h_0} \sigma_s(\bar{x}, \bar{u}); \quad \bar{b} := h_0 \bar{f}(\bar{y}, \bar{u}); \quad \bar{a} := \sqrt{h_0} \bar{\sigma}_s(\bar{y}, \bar{u}). \quad (3.127)$$

Nous obtenons après simplification<sup>3</sup> par  $h_0$  :

$$\begin{aligned} \lambda \Delta v &\leq \ell(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{\ell}(\bar{y}, \bar{u}) + 2\alpha |\sigma_s(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{\sigma}_s(\bar{y}, \bar{u})|^2 \\ &+ 2\alpha (h_0 |f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{f}(\bar{y}, \bar{u})|^2 + (f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{f}(\bar{y}, \bar{u})) \cdot (\bar{x} - \bar{y})) + o(1). \end{aligned} \quad (3.128)$$

---

<sup>3</sup>Avec  $|\sigma(x, u)|^2 := \sum_s |\sigma_s(x, u)|^2$ .

Utilisant pour  $\eta > 0$  "petit"

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2(\eta a)(b/\eta) \leq (1 + \eta^2)a^2 + (1 + \eta^{-2})b^2 \quad (3.129)$$

il vient, posant  $\delta := |\bar{x} - \bar{y}|$  :

$$|\sigma_s(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{\sigma}_s(\bar{y}, \bar{u})|^2 \leq (L_\sigma \delta + \|\sigma - \bar{\sigma}\|)^2 \leq (1 + \eta^2)L_\sigma^2 \delta^2 + (1 + \eta^{-2})\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2. \quad (3.130)$$

Procédant de même pour le terme  $|f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{f}(\bar{y}, \bar{u})|^2$ , et utilisant

$$(f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{f}(\bar{y}, \bar{u}) \cdot (\bar{x} - \bar{y})) \leq \|f - \bar{f}\| \delta + \lambda_{00} \delta^2. \quad (3.131)$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \lambda \Delta v \leq & \delta L_\ell + \|\ell - \bar{\ell}\| + \alpha(1 + \eta^2)(L_\sigma^2 + h_0 L_f^2) \delta^2 + \alpha \lambda_{00} \delta^2 \\ & + \alpha(1 + \eta^{-2})(\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2 + h_0 \|f - \bar{f}\|^2) + 2\alpha \|f - \bar{f}\| \delta + o(1) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Pour  $h_0$  et  $\eta$  assez petits, on a

$$\lambda_1 < \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_0), \quad \text{avec } \lambda_1 := (1 + \eta^2)(L_\sigma^2 + h_0 L_f^2) + \lambda_{00}. \quad (3.133)$$

Il vient donc, ordonnant suivant les puissances décroissantes de  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \lambda \psi(\bar{x}, \bar{y}) \leq & -\alpha(\lambda - \lambda_0) \delta^2 + (L_\ell + \alpha \|f - \bar{f}\|) \delta \\ & + \|\ell - \bar{\ell}\| + \alpha(1 + \eta^{-2})(\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2 + h_0 \|f - \bar{f}\|^2) + o(1). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Maximisant par rapport à  $\delta \in \mathbb{R}$ , donc prenant  $\delta = \frac{1}{2}\alpha^{-1} (L_\ell + \alpha \|f - \bar{f}\|) / (\lambda - \lambda_1)$ , il vient

$$\begin{aligned} \lambda \psi(\bar{x}, \bar{y}) \leq & \frac{1}{4\alpha(\lambda - \lambda_1)} (L_\ell + \alpha \|f - \bar{f}\|)^2 \\ & \|\ell - \bar{\ell}\| + \alpha(1 + \eta^{-2})(\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2 + h_0 \|f - \bar{f}\|^2) + o(1). \end{aligned} \quad (3.135)$$

Combinant avec (3.123) écrit au point  $(x, y)$ , il vient

$$\begin{aligned} \lambda (v^{h_0}(x) - \bar{v}^{h_0}(y)) \leq & \lambda \alpha |x - y|^2 + \frac{1}{4\alpha(\lambda - \lambda_1)} (L_\ell + \alpha \|f - \bar{f}\|)^2 \\ & \|\ell - \bar{\ell}\| + \alpha(1 + \eta^{-2})(\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2 + h_0 \|f - \bar{f}\|^2) + o(1). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Cette inégalité est de la forme

$$\lambda (v^{h_0}(x) - \bar{v}^{h_0}(y)) \leq \gamma_{-1} \alpha^{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 \alpha. \quad (3.137)$$

Minimisant par rapport à  $\alpha$ , il vient

$$\lambda (v^{h_0}(x) - \bar{v}^{h_0}(y)) \leq \inf_{\alpha} (\gamma_{-1} \alpha^{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 \alpha) = \gamma_0 + 2\sqrt{\gamma_{-1} \gamma_1}. \quad (3.138)$$

On a ici

$$\begin{aligned} \gamma_{-1} &= \frac{L_\ell^2}{4(\lambda - \lambda_1)}; \quad \gamma_0 = \frac{1}{2} \frac{L_\ell \|f - \bar{f}\|}{(\lambda - \lambda_1)} + \|\ell - \bar{\ell}\| + o(1); \\ \gamma_1 &= \lambda |x - y|^2 + \frac{\|f - \bar{f}\|^2}{\lambda - \lambda_1} + (1 + \eta^{-2})(\|\sigma - \bar{\sigma}\|^2 + h_0 \|f - \bar{f}\|^2) \end{aligned} \quad (3.139)$$

Majorant  $\sqrt{\gamma_1}$  avec l'inégalité  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2} \leq a + b + c + d$  (avec  $a, b, c, d$  positifs) on obtient la conclusion désirée. ■

**Remarque 3.32** Dans P.-L. Lions [30, Thm 2.3], on montre que la valeur du problème de contrôle stochastique est lipschitzienne si

$$\lambda > \frac{1}{2}L_\sigma^2 + \lambda_{00}. \quad (3.140)$$

Ici nous obtenons une valeur critique supérieure, mais du même ordre de grandeur.

**Corollaire 3.33** *Sous les hypothèses de la proposition 3.31, la solution de l'algorithme semilagrangien est lipschitzienne.*

**Proof.** On applique la proposition 3.31 à la translation du problème d'un vecteur  $z \in \mathbb{R}^n$ , donc avec les données

$$\bar{\ell}(x, u) := \ell(x + z, u); \quad \bar{f}(x, u) := f(x + z, u) \quad \bar{\sigma}(x, u) := \sigma(x + z, u), \quad (3.141)$$

dont la solution est  $\bar{v}^{h_0}(x) := v^{h_0}(x + z)$ . ■

### 3.3.3 Erreur de consistance

On établit d'abord l'erreur de consistance pour une fonction  $\psi$  régulière. Utilisant le développement (3.81) à l'ordre 4, il vient notant  $e_\pm := h_0 f(x, u) \pm \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)$  :

$$\begin{aligned} \Delta &:= \frac{1}{2}\psi(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)) + \frac{1}{2}\psi(x + h_0 f(x, u) - \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)) \\ &= \psi(x) + h_0 \left( \psi'(x) f(x, u) + \frac{1}{2} \psi''(x) (\sigma_s(x, u))^2 \right) + r_{1s}(x, u) + r_{2s}(x, u) \\ r_{1s}(x, u) &= \frac{1}{2} h_0^2 \psi''(x) (f(x, u))^2 + \frac{1}{3!} (\psi^{(3)}(e_+)^3 + \psi^{(3)}(e_-)^3) \\ r_{2s}(x, u) &:= \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!} \left( \psi^{(4)}(x + te_+) (e_+)^4 + \psi^{(4)}(x + te_-) (e_-)^4 \right) dt \end{aligned} \quad (3.142)$$

On note que seuls les puissances paires de  $\sigma_s(x, u)$  ont des contributions non nulles. On peut donc estimer l'erreur de consistance

$$r(x, u) := \sum_{s=1}^r |r_{1s}(x, u) + r_{2s}(x, u)| \quad (3.143)$$

par (majorant différentes constantes par 1)

$$\begin{aligned} r(x, u) \leq & h_0^2 \|\psi''(x)\| \|f(x, u)\|^2 + \|\psi^{(3)}\| (h_0^3 \|f(x, u)\|^3 + h_0^2 \|f(x, u)\| \|\sigma(x, u)\|) \\ & + \|\psi^{(4)}\| (h_0^4 \|f(x, u)\|^4 + h_0^3 \|f(x, u)\|^2 \|\sigma(x, u)\|^2 + h_0^2 \|\sigma(x, u)\|^4). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Utilisant (3.119), on voit que ce schéma peut s'écrire pour une fonction  $\psi$  régulière

$$\lambda \psi(x) := \inf_{u \in U} \left( \ell(x, u) + \psi'(x) f(x, u) + \frac{1}{2} \psi''(x) a(x, u) + h_0^{-1} (r_{1s}(x, u) + r_{2s}(x, u)) \right). \quad (3.145)$$

L'erreur de consistance avec l'équation HJB est donc de l'ordre de  $h_0^{-1} |r(x, u)|$ .

### 3.3.4 Estimation d'erreur

On a établi en (3.100) les estimations des tailles des dérivées des sous solutions obtenues par le procédé de Krylov (perturbation des coefficients puis régularisation par convolution). Si la solution  $V$  de l'équation HJB est lipschitienne, la sous solution  $w_\varepsilon$  satisfait  $\|D^k w_\varepsilon\|_\infty = O(\varepsilon^{-k})$ . On a donc avec (3.144)

$$V(x) - v^{h_0}(x) \leq O(\varepsilon) + h_0 O(\varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3}), \quad (3.146)$$

où le premier terme estime  $\|V - w_\varepsilon\|_\infty$  et le second tient compte de l'erreur de consistance. Le choix optimal de  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $h^{1/4}$ . Par symétrie on obtient la même estimation dans l'autre sens. Le résultat final est donc

**Théorème 3.34** *Sous les hypothèses de la proposition 3.31, on a*

$$\|V - v^{h_0}\|_\infty = O(h_0^{1/4}). \quad (3.147)$$

### 3.3.5 Discrétisation spatiale

L'algorithme semi lagrangien, pour être implémentable, doit s'accompagner d'une description de la dépendance spatiale permettant une implémentation effective. Une possibilité est de partitionner l'espace d'état par un ensemble  $\mathcal{S}$  des simplexes réguliers. La partition doit être *régulière* au sens où, si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux simplexes de  $\mathcal{S}$ , leur intersection est soit vide, soit une face commune à  $S_1$  et  $S_2$ . Alors l'espace  $H_{\mathcal{S}}$  des fonctions continues, affines sur chaque simplexe, s'obtient par combinaison linéaire des fonctions de bases, obtenues en fixant la valeur 1 sur un sommet d'un simplexe, et 0 sur tous les sommets autres que celui-ci. On impose alors la relation (3.117), en chaque sommet de triangle. L'algorithme s'écrit donc, notant  $s(\mathcal{S})$  l'ensemble des sommets : calculer  $v^{h_0, \mathcal{S}} \in H_{\mathcal{S}}$  tel que

$$v^{h_0, \mathcal{S}}(x) := \beta \inf_{u \in U} \left( h_0 \ell(x, u) + \frac{1}{2r} \sum_{s=1}^r [v^{h_0, \mathcal{S}}(x + h_0 f(x, u) + \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u)) + v^{h_0, \mathcal{S}}(x + h_0 f(x, u) - \sqrt{h_0} \sigma_s(x, u))] \right), \quad (3.148)$$

pour tout  $x \in s(\mathcal{S})$ .

Avec les arguments habituels de point fixe contractant on vérifie que cette équation admet dans  $H_{\mathcal{S}}$  une solution unique  $v^{h_0, \mathcal{S}}$ , telle que  $\|v^{h_0, \mathcal{S}}\|_\infty \leq \|\ell\|/\lambda$ .

**Lemme 3.35** *Si  $\lambda > \lambda_0$ , il existe  $c > 0$  tel que, si  $h$  est la taille maximale d'un simplexe :*

$$\|v^{h_0, \mathcal{S}} - v^{h_0}\|_\infty \leq c \frac{h}{h_0}. \quad (3.149)$$

**Proof.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , élément du simplexe  $S$ , donc de la forme, notant  $s(S)$  l'ensemble des sommets du simplexe  $S$  et  $\alpha_y$  les coefficients barycentriques (positifs et de somme 1) :



$x = \sum_{y \in s(S)} \alpha_y y$ . On a, puisque  $v^{h_0, \mathcal{S}}$  est affine sur  $S$  :

$$\begin{aligned} |v^{h_0, \mathcal{S}}(x) - v^{h_0}(x)| &= \left| \sum_{y \in s(S)} \alpha_y (v^{h_0, \mathcal{S}}(y) - v^{h_0}(x)) \right| \leq \sum_{y \in s(S)} \alpha_y |v^{h_0, \mathcal{S}}(y) - v^{h_0}(x)| \\ &\leq \sum_{y \in s(S)} \alpha_y (|v^{h_0, \mathcal{S}}(y) - v^{h_0}(y)| + |v^{h_0}(y) - v^{h_0}(x)|) \end{aligned} \quad (3.150)$$

En raison du corollaire 3.33,  $v^{h_0}(x)$  est uniformément lipschitzienne de constante notée  $L_0$ , et donc

$$\sum_{y \in s(S)} \alpha_y |v^{h_0}(y) - v^{h_0}(x)| \leq L_0 h. \quad (3.151)$$

Faisant la différence entre les équations de  $v^{h_0, \mathcal{S}}$  et  $v^{h_0}$ , et majorant la différence des infimum par le supremum des différences, il vient pour tout  $y \in s(S)$

$$|v^{h_0, \mathcal{S}}(y) - v^{h_0}(y)| \leq \beta \|v^{h_0, \mathcal{S}} - v^{h_0}\|_\infty \quad (3.152)$$

Combinant avec (3.150)-(3.151), il vient

$$|v^{h_0, \mathcal{S}}(x) - v^{h_0}(x)| \leq \beta \|v^{h_0, \mathcal{S}} - v^{h_0}\|_\infty + L_0 h. \quad (3.153)$$

Prenant le supremum du membre de gauche il vient

$$(1 - \beta) \|v^{h_0, \mathcal{S}} - v^{h_0}\|_\infty \leq L_0 h \quad (3.154)$$

d'où la conclusion découle. ■

**Remarque 3.36** Après discrétisation spatiale, l'estimation d'erreur est du type

$$c_1 h_0^{1/4} + c_2 \frac{h}{h_0}, \quad (3.155)$$

avec  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  indépendants de  $h$  et  $h_0$ . Pour  $h$  fixé le choix optimal de  $h_0$  est en  $O(h^{4/5})$  pour une erreur totale en  $O(h^{1/5})$ .

Notons que dans la méthode de différences finies généralisées, on a une erreur en  $O(h^{1/2})$  et on prend un pas de temps en  $O(h^2)$ , avec de plus un pas de temps en  $O(h^{1/2})$ , donc beaucoup plus grand, ce qui améliore la performance de l'algorithme, puisque le taux de convergence des algorithmes de point fixe est dans tous les cas  $\beta = (1 + h_0 \lambda)^{-1}$ .

On peut se demander si l'estimation du théorème 3.34 n'est pas pessimiste. Mais même si on arrivait à prouver que  $\|V - v^{h_0}\|_\infty = O(h_0^{1/2})$ , pour  $h$  fixé, le choix optimal de  $h_0$  serait  $O(h^{2/3})$ , avec une erreur totale en  $O(h^{1/3})$ . Il faudrait prouver que  $\|V - v^{h_0}\|_\infty = O(h_0)$ , pour retrouver les mêmes estimations d'erreur que dans la méthode de différences finies généralisées.

## Indications bibliographiques

**Unicité forte** La discussion du principe d'unicité forte suit le user's guide [18] en explicitant toutes les étapes ; l'introduction de la notion de fonction décomposable simplifie un peu l'exposé. On renvoie à [18] pour les extensions aux équations dans des ouverts avec conditions au bord. Voir aussi [23].

Nous avons mentionné que le principe d'unicité fort (théorème 3.17) est repris de [25, Thm 2.1]. L'obtention de la minoration de  $V - v^h$  suit [4] ; l'idée clé est le procédé de Krylov. Pour la majoration on se reportera à [5, 27, 26].

**Différences finies** Pour les méthodes de type différences finies, il y a peu de résultats d'estimations d'erreur en dehors du cas des hamiltoniens convexes. En particulier le cas des jeux est ouvert. Voir cependant les travaux sur la commande impulsionnelle et sur le cas du jeu dans lequel l'adversaire a pour décision l'arrêt du jeu [9, 10].

**Algorithme semi lagrangien** L'algorithme, dû à [15], étend au cas stochastique l'approche de [19]. Nous analyse reprend les outils de Camilli et Jakobsen [16], dans lequel on trouvera aussi l'analyse de systèmes comportant des sauts.

# Bibliographie

- [1] M. Akian. Analyse de l'algorithme multigrille FMGH de résolution d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman. In A. Bensoussan and J.-L. Lions, editors, *Analysis and optimization of systems (Antibes, 1990)*, volume 144 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 113–122. Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [2] E. Altman. *Constrained Markov decision processes*. Chapman and Hall, Boca Raton, 1999.
- [3] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques et Applications*. Springer, Paris, 1994.
- [4] G. Barles and E.R. Jakobsen. On the convergence rate of approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36 :33–54, 2002.
- [5] G. Barles and E.R. Jakobsen. Error bounds for monotone approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 43(2) :540–558 (electronic), 2005.
- [6] R. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, 1961.
- [7] D. Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control (2 volumes)*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [8] J.F. Bonnans. *Optimisation Continue*. Dunod, Paris, 2006.
- [9] J.F. Bonnans, S. Maroso, and H. Zidani. Error estimates for stochastic differential games : the adverse stopping case. *IMA, J. Numerical Analysis*, 26 :188–212, 2006.
- [10] J.F. Bonnans, S. Maroso, and H. Zidani. Error estimates for a stochastic impulse control problem. *Appl. Math. and Optim.*, 55(3) :327–357, 2007.
- [11] J.F. Bonnans, E. Ottenwaelter, and H. Zidani. Numerical schemes for the two dimensional second-order HJB equation. *ESAIM : M2AN*, 38 :723–735, 2004.
- [12] J.F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] J.F. Bonnans and H. Zidani. Consistency of generalized finite difference schemes for the stochastic HJB equation. *SIAM J. Numerical Analysis*, 41 :1008–1021, 2003.
- [14] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contraction dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam, 1973.

- [15] F. Camilli and M. Falcone. An approximation scheme for the optimal control of diffusion processes. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 29 :97–122, 1995.
- [16] F. Camilli and E. Jakobsen. A finite element like scheme for integro-partial differential Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(4) :2407–2431, 2009.
- [17] R.W. Cottle, J.-S. Pang, and R.E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, New York, 1992.
- [18] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. American Mathematical Society (New Series)*, 27 :1–67, 1992.
- [19] I. Capuzzo Dolcetta. On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming. *Applied Mathematics and Optimization*, 10 :367–377, 1983.
- [20] I. Capuzzo Dolcetta and H. Ishii. Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, 11 :161–181, 1984.
- [21] E.A. Feinberg and A. Shwartz. Constrained discounted dynamic programming. *Mathematics of Operations Research*, 21 :922–945, 1996.
- [22] W.H. Fleming and R. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*, volume 1 of *Applications of mathematics*. Springer, New York, 1975.
- [23] W.H. Fleming and H.M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer, New York, 1993.
- [24] O. Hernández-Lerma and J.B. Lasserre. *Further topics on discrete-time Markov control processes*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [25] E.R. Jakobsen and K.H. Karlsen. Continuous dependence estimates for viscosity solutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations. *Electronic J. Differential Equations*, pages 1–10, 2002.
- [26] Nicolai V. Krylov. The rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman equations with Lipschitz coefficients. *Appl. Math. Optim.*, 52(3) :365–399, 2005.
- [27] N.V. Krylov. On the rate of convergence of finite-difference approximations for Bellman’s equations with variable coefficients. *Probability Theory and Related Fields*, 117 :1–16, 2000.
- [28] H.J. Kushner and P.G. Dupuis. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, volume 24 of *Applications of mathematics*. Springer, New York, 2001. Second edition.
- [29] J.-L. Lions and A. Bensoussan. *Application des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, volume 6 of *Méthodes mathématiques de l’informatique*. Dunod, Paris, 1978.
- [30] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. I. The dynamic programming principle and applications. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(10) :1101–1174, 1983.

- [31] P.-L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. Part 2 : viscosity solutions and uniqueness. *Communications in partial differential equations*, 8 :1229–1276, 1983.
- [32] G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnoy Kan, and M.J. Todd, editors. *Optimization*, volume 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [33] J.P. Quadrat. *Décision et commande en présence d'incertitude*. Cours photocopié, Ecole Polytechnique, 1994.
- [34] L.C.G. Rogers and D. Talay, editors. *Numerical methods in finance*. Cambridge University Press, 1997.
- [35] M.M. Tidball, A. Lombardi, O. Pourtallier, and E. Altman. Continuity of optimal values and solutions for control of Markov chains with constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38 :1204–1222 (electronic), 2000.