

# Stabilisation des systèmes linéaires à excitation persistante

Guilherme MAZANTI

30 juin 2011

**Directeurs de stage :** Yacine CHITOUR  
Mario SIGALOTTI

CMAP - École Polytechnique



# Plan

- 1 Introduction
  - Définitions
  - Questions

# Plan

- 1 Introduction
  - Définitions
  - Questions
- 2 Résultats précédents
  - Stabilisation
  - Stabilisation à vitesse arbitraire

# Plan

- 1 Introduction
  - Définitions
  - Questions
- 2 Résultats précédents
  - Stabilisation
  - Stabilisation à vitesse arbitraire
- 3 Résultat principal
  - Énoncé
  - Démonstration

# Plan

- 1 Introduction
  - Définitions
  - Questions
- 2 Résultats précédents
  - Stabilisation
  - Stabilisation à vitesse arbitraire
- 3 Résultat principal
  - Énoncé
  - Démonstration
- 4 Conclusions

# Introduction

## Définitions

- Système de commande à commutation

# Introduction

## Définitions

- Système de commande à commutation (cas linéaire, commutation scalaire dans la commande)

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu, \quad \alpha \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

# Introduction

## Définitions

- Système de commande à commutation (cas linéaire, commutation scalaire dans la commande)

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu, \quad \alpha \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Principe : étudier le comportement du système **uniformément** par rapport à la classe  $\mathcal{G}$ .



# Introduction

## Définitions

- Système de commande à commutation (cas linéaire, commutation scalaire dans la commande)

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu, \quad \alpha \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Principe : étudier le comportement du système **uniformément** par rapport à la classe  $\mathcal{G}$ .

- Signaux à excitation persistante

# Introduction

## Définitions

- Système de commande à commutation (cas linéaire, commutation scalaire dans la commande)

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu, \quad \alpha \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Principe : étudier le comportement du système **uniformément** par rapport à la classe  $\mathcal{G}$ .

- Signaux à excitation persistante : pour  $T \geq \mu > 0$ , on dit que  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$  si  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  est mesurable et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_t^{t+T} \alpha(s) ds \geq \mu.$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système **à vitesse arbitraire** ?

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système **à vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système **à vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que



# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système **à vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) :=$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système à **vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) := - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t}$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système à **vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) := - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \geq \lambda$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système à **vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) := - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \geq \lambda$$

$$\text{RC}(T, \mu)$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système à **vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) := - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \geq \lambda$$

$$\text{RC}(T, \mu) := \sup_{K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})} \text{rc}(K, T, \mu)$$

# Introduction

## Questions

- Recherche d'une stabilisation par retour d'état  $u = -Kx$ .

$$\dot{x} = (A - \alpha(t)BK)x.$$

On cherche  $K$  **uniforme** par rapport à  $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ . On dit que  $K$  est un  **$(T, \mu)$ -stabilisateur**.

- Est-il possible de stabiliser le système à **vitesse arbitraire** ?  
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on cherche  $K$  tel que

$$\text{rc}(K, T, \mu) := - \sup_{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)} \sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \geq \lambda$$

$$\text{RC}(T, \mu) := \sup_{K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})} \text{rc}(K, T, \mu) = +\infty$$

# Résultats précédents

## Stabilisation

# Résultats précédents

## Stabilisation

### Théorème (Chaillet, Chitour, Loría, Sigalotti)

*Supposons  $(A, B)$  stabilisable et  $A$  stable. Alors  $\exists K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$  qui est un  $(T, \mu)$ -stabilisateur du système  $\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu$  pour tous  $T \geq \mu > 0$ .*



# Résultats précédents

## Stabilisation

### Théorème (Chaillet, Chitour, Loría, Sigalotti)

*Supposons  $(A, B)$  stabilisable et  $A$  stable. Alors  $\exists K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$  qui est un  $(T, \mu)$ -stabilisateur du système  $\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu$  pour tous  $T \geq \mu > 0$ .*

Dans ce théorème,  $K$  ne dépend pas de  $T$  et  $\mu$ .

# Résultats précédents

## Stabilisation

### Théorème (Chaillet, Chitour, Loría, Sigalotti)

*Supposons  $(A, B)$  stabilisable et  $A$  stable. Alors  $\exists K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$  qui est un  $(T, \mu)$ -stabilisateur du système  $\dot{x} = Ax + \alpha(t)Bu$  pour tous  $T \geq \mu > 0$ .*

Dans ce théorème,  $K$  ne dépend pas de  $T$  et  $\mu$ .

### Théorème (Chitour, Sigalotti)

*Supposons  $(A, b) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  commandable et toutes les valeurs propres de  $A$  à partie réelle négative ou nulle. Alors, pour tous  $T \geq \mu > 0$ , il existe un  $(T, \mu)$ -stabilisateur  $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$  du système  $\dot{x} = Ax + \alpha(t)bu$ .*

# Résultats précédents

Stabilisation à vitesse arbitraire

# Résultats précédents

## Stabilisation à vitesse arbitraire

### Théorème (Chitour, Sigalotti)

*Soit  $d$  un entier positif. Il existe  $\rho^* \in ]0, 1[$  tel que,  $\forall (A, b) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  commandable et  $\forall T, \mu$  positifs avec  $\rho^* < \frac{\mu}{T} \leq 1$ , on a  $RC(T, \mu) = +\infty$ .*

# Résultats précédents

## Stabilisation à vitesse arbitraire

### Théorème (Chitour, Sigalotti)

*Soit  $d$  un entier positif. Il existe  $\rho^* \in ]0, 1[$  tel que,  $\forall (A, b) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  commandable et  $\forall T, \mu$  positifs avec  $\rho^* < \frac{\mu}{T} \leq 1$ , on a  $RC(T, \mu) = +\infty$ .*

### Théorème (Chitour, Sigalotti)

*Il existe  $\rho_* \in ]0, 1[$  tel que,  $\forall (A, b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  commandable et  $\forall T, \mu$  positifs avec  $0 < \frac{\mu}{T} < \rho_*$ , on a  $RC(T, \mu) < +\infty$ .*

# Résultats précédents

## Stabilisation à vitesse arbitraire

- En dimension 2, la convergence à vitesse arbitraire dépend du rapport  $\frac{\mu}{T}$ .

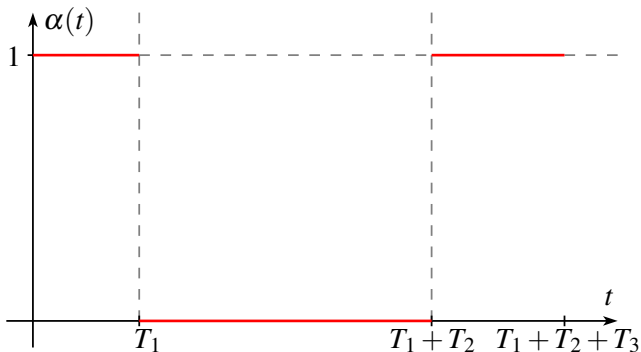
# Résultats précédents

## Stabilisation à vitesse arbitraire

- En dimension 2, la convergence à vitesse arbitraire dépend du rapport  $\frac{\mu}{T}$ .
- Quitte à restreindre la classe  $\mathcal{G}(T, \mu)$ , est-il possible d'obtenir la convergence à vitesse arbitraire pour toute valeur de  $\frac{\mu}{T}$  ?

# Résultats précédents

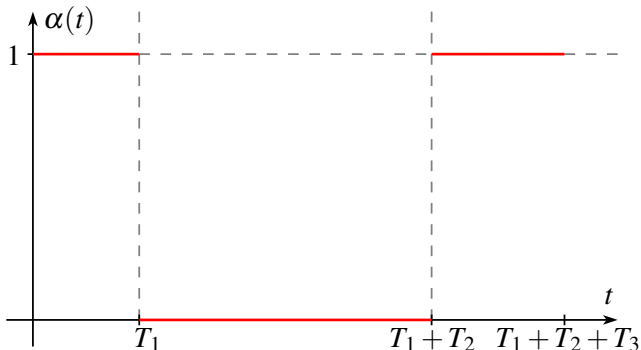
## Stabilisation à vitesse arbitraire





# Résultats précédents

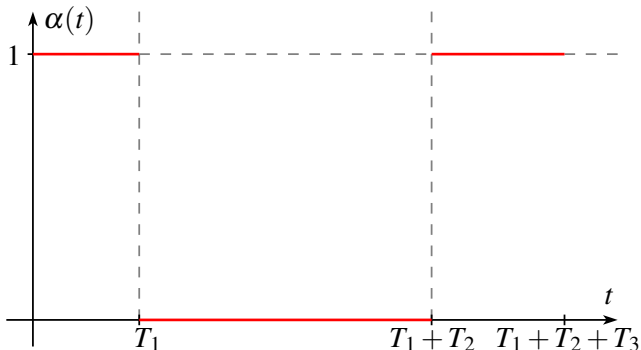
## Stabilisation à vitesse arbitraire



- Phénomène d'*overshoot*.

# Résultats précédents

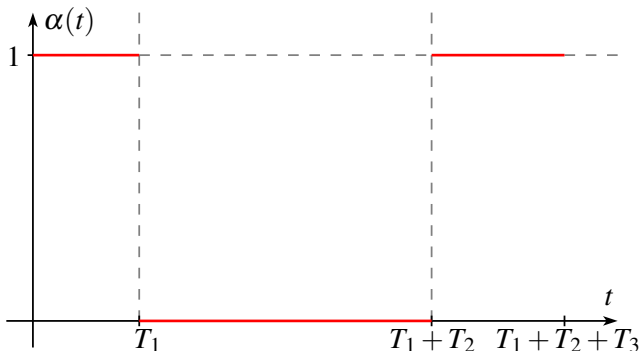
## Stabilisation à vitesse arbitraire



- Phénomène d'*overshoot*.
- Lorsque  $\|K\|$  augmente,  $\alpha$  oscille de plus en plus.

# Résultats précédents

## Stabilisation à vitesse arbitraire



- Phénomène d'*overshoot*.
- Lorsque  $\|K\|$  augmente,  $\alpha$  oscille de plus en plus.
- Borner les oscillations de  $\alpha$  ?

# Résultat principal

## Énoncé

- Pour borner les oscillations de  $\alpha$ , on ne considère que les signaux  $\alpha$  *M-lipschitziens*.

# Résultat principal

## Énoncé

- Pour borner les oscillations de  $\alpha$ , on ne considère que les signaux  $\alpha$   **$M$ -lipschitziens**.



$$\mathcal{D}(T, \mu, M) = \{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu) \mid \alpha \text{ est } M\text{-lipschitzienne}\}.$$

# Résultat principal

## Énoncé

- Pour borner les oscillations de  $\alpha$ , on ne considère que les signaux  $\alpha$   **$M$ -lipschitziens**.



$$\mathcal{D}(T, \mu, M) = \{\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu) \mid \alpha \text{ est } M\text{-lipschitzienne}\}.$$

- On cherche à retrouver un résultat de convergence à vitesse arbitraire pour le double intégrateur :

$$\dot{x} = Ax + \alpha(t)bu, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M).$$

# Résultat principal

## Énoncé

### Théorème

*Soient  $T$ ,  $\mu$  et  $M$  des constantes positives avec  $T \geq \mu > 0$ .*

# Résultat principal

## Énoncé

### Théorème

*Soient  $T$ ,  $\mu$  et  $M$  des constantes positives avec  $T \geq \mu > 0$ . Alors, pour le double intégrateur avec  $\alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$ , on a  $RC(T, \mu, M) = +\infty$ ,*



# Résultat principal

## Énoncé

### Théorème

Soient  $T$ ,  $\mu$  et  $M$  des constantes positives avec  $T \geq \mu > 0$ . Alors, pour le double intégrateur avec  $\alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$ , on a  $RC(T, \mu, M) = +\infty$ , i.e.,  $\forall \lambda, \exists K$  tel que,  $\forall \alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$ , on a

$$\sup_{\|x_0\|=1} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t} \leq -\lambda.$$

# Résultat principal

## Démonstration

### Stratégie de la preuve

- Pour chaque  $\lambda$ , on construit un  $K$  tel que  $\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ .

# Résultat principal

## Démonstration

### Stratégie de la preuve

- Pour chaque  $\lambda$ , on construit un  $K$  tel que  $\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ .
- Changement de variables.

# Résultat principal

## Démonstration

### Stratégie de la preuve

- Pour chaque  $\lambda$ , on construit un  $K$  tel que  $\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ .
- Changement de variables.
- Découpage du temps en intervalles :  $\mathcal{J}_+$  et  $\mathcal{J}_0$ .

# Résultat principal

## Démonstration

### Stratégie de la preuve

- Pour chaque  $\lambda$ , on construit un  $K$  tel que  $\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ .
- Changement de variables.
- Découpage du temps en intervalles :  $\mathcal{J}_+$  et  $\mathcal{J}_0$ .
- Estimations sur chaque type d'intervalle.

# Résultat principal

## Démonstration

### Stratégie de la preuve

- Pour chaque  $\lambda$ , on construit un  $K$  tel que  $\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{-\lambda t}$ .
- Changement de variables.
- Découpage du temps en intervalles :  $\mathcal{J}_+$  et  $\mathcal{J}_0$ .
- Estimations sur chaque type d'intervalle.
- On fixe par la suite  $K = (k^2 \quad k)$ ,  $k > 0$ , et  $h = \sqrt{2kM}$ .

# Résultat principal

Démonstration : changement de variables

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\alpha(t) & -k\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad \ddot{x}_1 + k\alpha(t)\dot{x}_1 + k^2\alpha(t)x_1 = 0.$$

# Résultat principal

Démonstration : changement de variables

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\alpha(t) & -k\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad \ddot{x}_1 + k\alpha(t)\dot{x}_1 + k^2\alpha(t)x_1 = 0.$$

$$y = e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{2} \alpha(t) - \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} x, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t}, \\ y_2 = \dot{y}_1. \end{cases}$$



# Résultat principal

Démonstration : changement de variables

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\alpha(t) & -k\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad \ddot{x}_1 + k\alpha(t)\dot{x}_1 + k^2\alpha(t)x_1 = 0.$$

$$y = e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{2} \alpha(t) - \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} x, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t}, \\ y_2 = \dot{y}_1. \end{cases}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad \ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0.$$

# Résultat principal

Démonstration : changement de variables

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\alpha(t) & -k\alpha(t) \end{pmatrix} x, \quad \ddot{x}_1 + k\alpha(t)\dot{x}_1 + k^2\alpha(t)x_1 = 0.$$

$$y = e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{2}\alpha(t) - \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix} x, \quad \begin{cases} y_1 = x_1 e^{\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{h}{2} t}, \\ y_2 = \dot{y}_1. \end{cases}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad \ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0.$$

$$\gamma(t) = \beta(t) + \frac{M - \dot{\alpha}(t)}{2k}, \quad \beta(t) = \alpha(t) \left(1 - \frac{1}{4}\alpha(t)\right).$$

# Résultat principal

Démonstration : rotations autour de l'origine

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad \ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0.$$

# Résultat principal

Démonstration : rotations autour de l'origine

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad \ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0.$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\sin^2 \theta - k^2\gamma(t)\cos^2 \theta - h\sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d}{dt} \ln r &= \sin \theta \cos \theta (1 - k^2\gamma(t)) - h\sin^2 \theta. \end{aligned}$$

# Résultat principal

Démonstration : rotations autour de l'origine

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad \ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + k^2\gamma(t)y_1 = 0.$$

En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\sin^2 \theta - k^2\gamma(t)\cos^2 \theta - h\sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d}{dt} \ln r &= \sin \theta \cos \theta (1 - k^2\gamma(t)) - h\sin^2 \theta. \end{aligned}$$

## Lemme

*Il existe  $K_1(T, \mu, M)$  tel que, pour  $k > K_1(T, \mu, M)$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$ .*

# Résultat principal

Démonstration : décomposition en intervalles

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$ , on peut définir

# Résultat principal

Démonstration : décomposition en intervalles

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$ , on peut définir

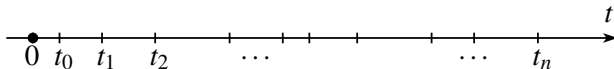
$$\begin{aligned}t_0 &= \inf\{t \geq 0 \mid \frac{\theta(t)}{\pi} \in \mathbb{Z}\}, \\t_n &= \inf\{t \geq t_{n-1} \mid \theta(t) = \theta(t_{n-1}) - \pi\}, \quad n \geq 1, \\I_0 &= [0, t_0], \quad I_n = [t_{n-1}, t_n], \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

# Résultat principal

Démonstration : décomposition en intervalles

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$ , on peut définir

$$\begin{aligned}t_0 &= \inf\{t \geq 0 \mid \frac{\theta(t)}{\pi} \in \mathbb{Z}\}, \\t_n &= \inf\{t \geq t_{n-1} \mid \theta(t) = \theta(t_{n-1}) - \pi\}, \quad n \geq 1, \\I_0 &= [0, t_0], \quad I_n = [t_{n-1}, t_n], \quad n \geq 1.\end{aligned}$$



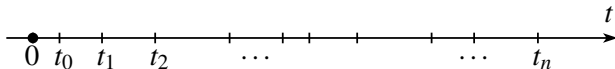


# Résultat principal

Démonstration : décomposition en intervalles

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = -\infty$ , on peut définir

$$\begin{aligned}t_0 &= \inf\{t \geq 0 \mid \frac{\theta(t)}{\pi} \in \mathbb{Z}\}, \\t_n &= \inf\{t \geq t_{n-1} \mid \theta(t) = \theta(t_{n-1}) - \pi\}, \quad n \geq 1, \\I_0 &= [0, t_0], \quad I_n = [t_{n-1}, t_n], \quad n \geq 1.\end{aligned}$$



$$\mathcal{J}_+ = \{I_n \mid \exists t \in I_n, \beta(t) \geq 2/\sqrt{k}\}, \quad \mathcal{J}_0 = \{I_n \mid \forall t \in I_n, \beta(t) < 2/\sqrt{k}\}.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_+$

## Lemme

*Il existe  $K_2(M)$  tel que, pour  $k > K_2(M)$  et pour tout  $I \in \mathcal{J}_+$ , on a  $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$  p.p. sur  $I$ .*

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_+$

## Lemme

*Il existe  $K_2(M)$  tel que, pour  $k > K_2(M)$  et pour tout  $I \in \mathcal{J}_+$ , on a  $\gamma(t) \geq 1/\sqrt{k}$  p.p. sur  $I$ .*

## Lemme

*Il existe  $K_3(M)$  tel que, pour  $k > K_3(M)$  et pour tout  $I \in \mathcal{J}_+$ , on a*

$$r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{4Mk^{1/2}(t_n - t_{n-1})}.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_+$

$$\frac{d}{d\theta} \ln r = - \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - k^2 \gamma(t)) - h \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + k^2 \gamma(t) \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} =: F(\theta, \gamma(t)).$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_+$

$$\frac{d}{d\theta} \ln r = - \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - k^2 \gamma(t)) - h \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + k^2 \gamma(t) \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} =: F(\theta, \gamma(t)).$$

Intégration sur un demi-tour :

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} [F(\vartheta, \gamma \circ \tau(\vartheta)) - F(\vartheta, \gamma_0)] d\vartheta.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_+$

$$\frac{d}{d\theta} \ln r = - \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - k^2 \gamma(t)) - h \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + k^2 \gamma(t) \cos^2 \theta + h \sin \theta \cos \theta} =: F(\theta, \gamma(t)).$$

Intégration sur un demi-tour :

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \int_{\theta(t_n)}^{\theta(t_n)+\pi} [F(\vartheta, \gamma \circ \tau(\vartheta)) - F(\vartheta, \gamma_0)] d\vartheta.$$

En calculant  $\frac{\partial F}{\partial \gamma}(\vartheta, \gamma)$  et en estimant  $\gamma$  et  $\beta$ , on obtient

$$\ln \frac{r(t_n)}{r(t_{n-1})} \leq \frac{2k^{1/2}M(t_n - t_{n-1})}{1 - \frac{M}{2k^{1/2}}} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{kM}{2k^{3/2} - kM}} \right)$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

On s'intéresse maintenant aux intervalles de  $\mathcal{J}_0$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

On s'intéresse maintenant aux intervalles de  $\mathcal{J}_0$ .

- $I = [0, \tau] \in \mathcal{J}_0$ .



# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

On s'intéresse maintenant aux intervalles de  $\mathcal{J}_0$ .

- $I = [0, \tau] \in \mathcal{J}_0$ .
- $r(\tau) = r(0)e^{\Lambda\tau}$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

On s'intéresse maintenant aux intervalles de  $\mathcal{J}_0$ .

- $I = [0, \tau] \in \mathcal{J}_0$ .
- $r(\tau) = r(0)e^{\Lambda\tau}$ .
- On veut calculer quel  $\gamma$  maximise  $\Lambda = \frac{1}{\tau} \ln \frac{r(\tau)}{r(0)}$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

On s'intéresse maintenant aux intervalles de  $\mathcal{J}_0$ .

- $I = [0, \tau] \in \mathcal{J}_0$ .
- $r(\tau) = r(0)e^{\Lambda\tau}$ .
- On veut calculer quel  $\gamma$  maximise  $\Lambda = \frac{1}{\tau} \ln \frac{r(\tau)}{r(0)}$ .
- Problème de contrôle optimal.

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \sup \frac{1}{\tau} \ln \|y(\tau)\| \text{ avec} \\ \tau \in \left[ \frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right], \quad I = [0, \tau], \quad \gamma \in L^\infty(I, [0, 1]), \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}. \end{array} \right.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \sup \frac{1}{\tau} \ln \|y(\tau)\| \text{ avec} \\ \tau \in \left[ \frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right], \quad I = [0, \tau], \quad \gamma \in L^\infty(I, [0, 1]), \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}. \end{array} \right.$$

- Existence d'une solution à ce problème.

# Résultat principal

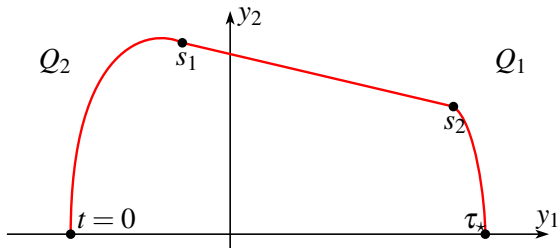
Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \sup \frac{1}{\tau} \ln \|y(\tau)\| \text{ avec} \\ \tau \in \left[ \frac{\pi}{1+h+3k^{3/2}}, T \right], \quad I = [0, \tau], \quad \gamma \in L^\infty(I, [0, 1]), \\ \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3k^{3/2}\gamma(t) & -h \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(\tau) \in \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}_+ \right\}. \end{array} \right.$$

- Existence d'une solution à ce problème.
- Application du PMP.

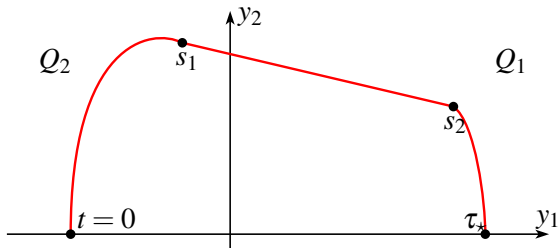
# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$



# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$



Maintenant, il suffit de calculer  $\Lambda = \frac{1}{\tau} \ln r(\tau)$  pour une telle trajectoire.



# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

- Étant données  $s_1$  et  $s_2$ , la trajectoire est déterminée de façon unique.

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

- Étant données  $s_1$  et  $s_2$ , la trajectoire est déterminée de façon unique.
- Maximisation par rapport à  $s_1$  et  $s_2$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

- Étant données  $s_1$  et  $s_2$ , la trajectoire est déterminée de façon unique.
- Maximisation par rapport à  $s_1$  et  $s_2$ .
- $\Lambda \leq \sqrt{3}k^{3/4}$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimations sur les intervalles  $\mathcal{J}_0$

- Étant données  $s_1$  et  $s_2$ , la trajectoire est déterminée de façon unique.
- Maximisation par rapport à  $s_1$  et  $s_2$ .
- $\Lambda \leq \sqrt{3}k^{3/4}$ .
- $r(t_n) \leq r(t_{n-1})e^{\sqrt{3}k^{3/4}(t_n - t_{n-1})}$ .

# Résultat principal

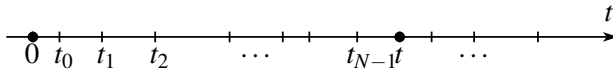
Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

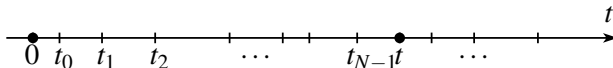
Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes



# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes

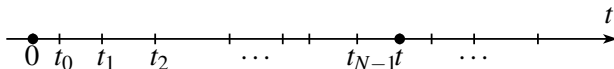


- Longueur des intervalles bornée par  $T$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes



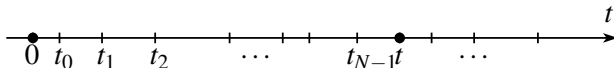
- Longueur des intervalles bornée par  $T$ .
- $r(t_0) \leq r(0)e^{T(k^2+h+1)}$ ,  $r(t) \leq r(t_{N-1})e^{T(k^2+h+1)}$ .



# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes

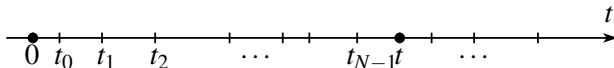


- Longueur des intervalles bornée par  $T$ .
- $r(t_0) \leq r(0)e^{T(k^2+h+1)}$ ,  $r(t) \leq r(t_{N-1})e^{T(k^2+h+1)}$ .
- $r(t) \leq Cr(0)e^{\sqrt{3}k^{3/4}t+4Mk^{1/2}t}$

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes

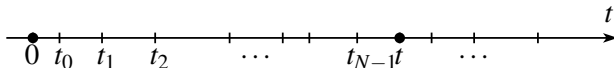


- Longueur des intervalles bornée par  $T$ .
- $r(t_0) \leq r(0)e^{T(k^2+h+1)}$ ,  $r(t) \leq r(t_{N-1})e^{T(k^2+h+1)}$ .
- $r(t) \leq Cr(0)e^{\sqrt{3}k^{3/4}t+4Mk^{1/2}t}$  avec  $C$  ne dépendant que de  $k$ ,  $T$  et  $M$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $y$

Pour estimer  $y$ , on regroupe les estimations précédentes



- Longueur des intervalles bornée par  $T$ .
- $r(t_0) \leq r(0)e^{T(k^2+h+1)}$ ,  $r(t) \leq r(t_{N-1})e^{T(k^2+h+1)}$ .
- $r(t) \leq Cr(0)e^{\sqrt{3}k^{3/4}t+4Mk^{1/2}t}$  avec  $C$  ne dépendant que de  $k$ ,  $T$  et  $M$ . Pour  $k$  suffisamment grand,
- $\|y(t)\| \leq C \|y(0)\| e^{2k^{3/4}t}$ .

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $x$

- Rapport entre  $x$  et  $y$  :

$$x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} y.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $x$

- Rapport entre  $x$  et  $y$  :

$$x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} y.$$

- Donc

$$\|x(t)\| \leq C' \|x(0)\| e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t + 2k^{3/4} t}.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $x$

- Rapport entre  $x$  et  $y$  :

$$x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} y.$$

- Donc

$$\|x(t)\| \leq C' \|x(0)\| e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t + 2k^{3/4} t}.$$

- $\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{(-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4}) t}.$

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $x$

- Rapport entre  $x$  et  $y$  :

$$x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} y.$$

- Donc

$$\|x(t)\| \leq C' \|x(0)\| e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t + 2k^{3/4} t}.$$

- $\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{(-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4}) t}$ .
- Pour  $k$  suffisamment grand,

$$\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$

# Résultat principal

Démonstration : estimation de  $x$

- Rapport entre  $x$  et  $y$  :

$$x = e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \alpha(t) & 1 \end{pmatrix} y.$$

- Donc

$$\|x(t)\| \leq C' \|x(0)\| e^{-\frac{k}{2} \int_0^t \alpha(s) ds + \frac{h}{2} t + 2k^{3/4} t}.$$

- $\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{(-\frac{k}{2} \frac{\mu}{T} + \frac{h}{2} + 2k^{3/4}) t}$ .
- Pour  $k$  suffisamment grand,

$$\|x(t)\| \leq \bar{C} \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$



# Conclusions

- On obtient la vitesse de convergence arbitraire pour  $\alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$  dans le cas du double intégrateur.

# Conclusions

- On obtient la vitesse de convergence arbitraire pour  $\alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$  dans le cas du double intégrateur.
- Généralisation à tout système en dimension 2.

# Conclusions

- On obtient la vitesse de convergence arbitraire pour  $\alpha \in \mathcal{D}(T, \mu, M)$  dans le cas du double intégrateur.
- Généralisation à tout système en dimension 2.
- Généralisation aux dimensions supérieures.

