Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica

Sistemas Chaveados: Estudo Geral

Guilherme Afonso Mazanti

25 de novembro de 2011

Orientadores: Yacine Chitour
Mario Sigalotti

O Projeto

O Projeto

- Estágio de pesquisa na École Polytechnique: "Estabilização de sistemas lineares a excitação persistente".

O Projeto

- Estágio de pesquisa na École Polytechnique: “Estabilização de sistemas lineares a excitação persistente”.
- Estudo de um tipo particular de sistema chaveado.

O Projeto

- Estágio de pesquisa na École Polytechnique: "Estabilização de sistemas lineares a excitação persistente".
- Estudo de um tipo particular de sistema chaveado.
- Objetivo do projeto: estudo geral da teoria de estabilidade de sistemas chaveados.

O Projeto

- Estágio de pesquisa na École Polytechnique: "Estabilização de sistemas lineares a excitação persistente".
- Estudo de um tipo particular de sistema chaveado.
- Objetivo do projeto: estudo geral da teoria de estabilidade de sistemas chaveados.
- Principais resultados, linhas de pesquisa, técnicas utilizadas, problemas em aberto.

Definições

Sistemas híbridos

Definições

Sistemas híbridos

Sistema apresentando uma dinâmica contínua $x \in \mathbb{R}^d$ e uma dinâmica discreta $\sigma \in \mathscr{I}$ em interação.

Definições

Sistemas híbridos

Sistema apresentando uma dinâmica contínua $x \in \mathbb{R}^d$ e uma dinâmica discreta $\sigma \in \mathscr{I}$ em interação.

Exemplos:

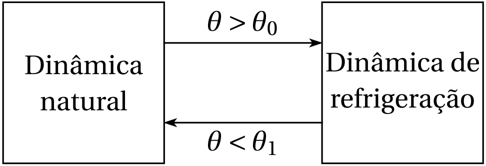
Definições

Sistemas híbridos

Sistema apresentando uma dinâmica contínua $x \in \mathbb{R}^d$ e uma dinâmica discreta $\sigma \in \mathscr{I}$ em interação.

Exemplos:

- Sistema de refrigeração de um quarto



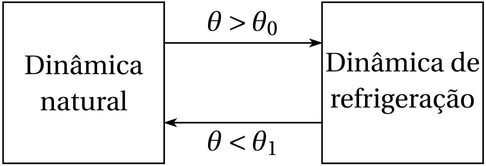
Definições

Sistemas híbridos

Sistema apresentando uma dinâmica contínua $x \in \mathbb{R}^d$ e uma dinâmica discreta $\sigma \in \mathscr{I}$ em interação.

Exemplos:

- Sistema de refrigeração de um quarto



- Outros exemplos: motor a combustão, processos químicos, sistemas de potência, etc.

Definições

Sistemas chaveados

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.

Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^d$: *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$: *controle*, $\sigma(t) \in \mathscr{I}$: *sinal de chaveamento* (constante por partes).

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^d$: *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$: *controle*, $\sigma(t) \in \mathscr{I}$: *sinal de chaveamento* (constante por partes).

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)),$$

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^d$: *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$: *controle*, $\sigma(t) \in \mathscr{I}$: *sinal de chaveamento* (constante por partes).

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \qquad \varphi \in \mathscr{G}.$$

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^d$: *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$: *controle*, $\sigma(t) \in \mathcal{I}$: *sinal de chaveamento* (constante por partes).

$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \qquad \varphi \in \mathcal{G}.$$

$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t))$, $k \in \mathcal{I}$: *modo* ou *subsistema*.

Definições

Sistemas chaveados

Sistema híbrido em que a dinâmica de interesse é a contínua.
Os detalhes da dinâmica discreta são abstraídos.

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

$x(t) \in \mathbb{R}^d$: *estado*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$: *controle*, $\sigma(t) \in \mathcal{I}$: *sinal de chaveamento* (constante por partes).

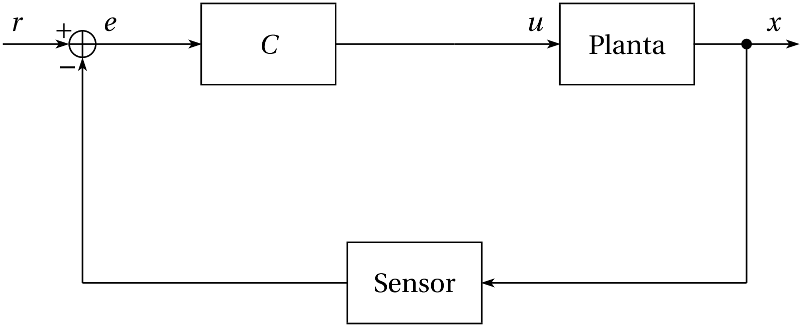
$$\sigma(t) = \varphi(t, \sigma(t^-), x(t)), \qquad \varphi \in \mathcal{G}.$$

$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u(t))$, $k \in \mathcal{I}$: *modo* ou *subsistema*.
σ: dependente do tempo ou do estado, com ou sem memória, autônomo ou controlado, determinístico ou aleatório.

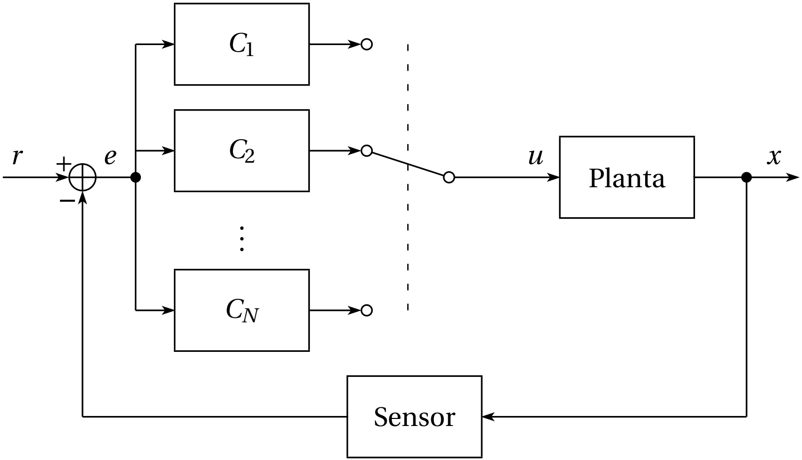
Exemplo: múltiplos controladores

Exemplo: múltiplos controladores

Exemplo: múltiplos controladores



Exemplo: múltiplos controladores



Definições

Estabilidade

Definições

Estabilidade

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$

Definições

Estabilidade

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$

Estabilidade (da origem) no sentido de Lyapunov.

Definições

Estabilidade

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$

Estabilidade (da origem) no sentido de Lyapunov.

Estabilidade exponencial uniforme global (GUES):

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\lambda t}$$

para todo sinal de chaveamento possível σ.

Definições

Estabilidade

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$

Estabilidade (da origem) no sentido de Lyapunov.

Estabilidade exponencial uniforme global (GUES):

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

para todo sinal de chaveamento possível σ.

Análise através de funções de Lyapunov.

Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Apesar do modelo de sistemas chaveados ser simples, sua análise não é trivial.

Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Apesar do modelo de sistemas chaveados ser simples, sua análise não é trivial.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Apesar do modelo de sistemas chaveados ser simples, sua análise não é trivial.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

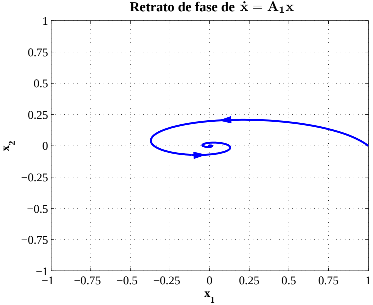
$$\dot{x} = A_1 x \qquad \dot{x} = A_2 x$$

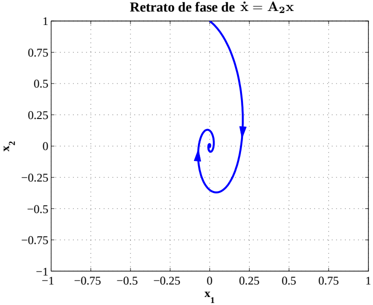
Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Apesar do modelo de sistemas chaveados ser simples, sua análise não é trivial.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = A_1 x \qquad \dot{x} = A_2 x$$



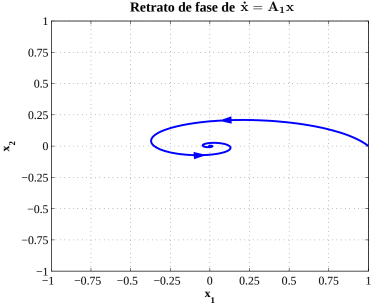


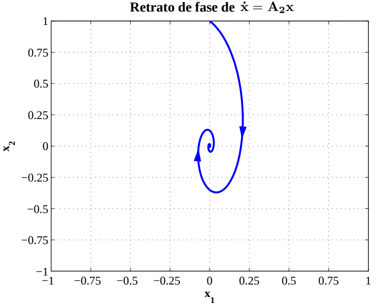
Exemplo: Instabilidade com subsistemas estáveis

Apesar do modelo de sistemas chaveados ser simples, sua análise não é trivial.

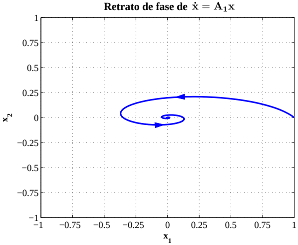
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

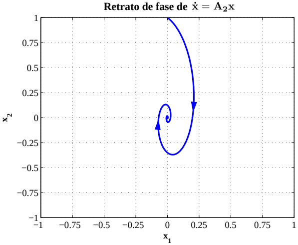
$$\dot{x} = A_1 x \qquad \dot{x} = A_2 x$$

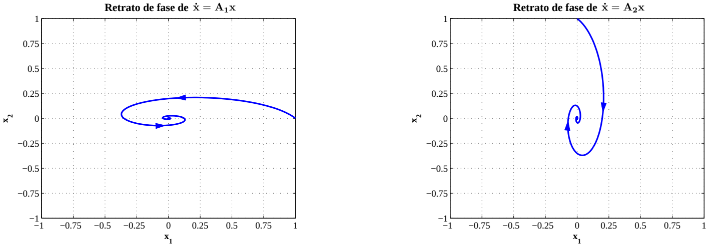




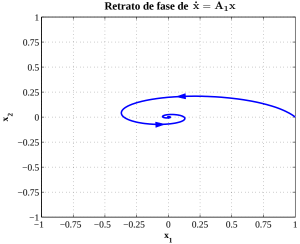
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$$

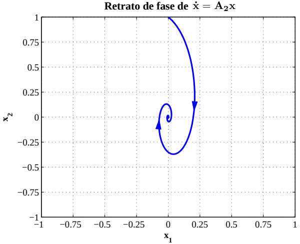

Retrato de fase de $\dot{x} = A_1 x$
1
0.75
0.5
0.25
0
−0.25
−0.5
−0.75
−1
−1
−0.75
−0.5
−0.25
0
0.25
0.5
0.75
1
x_1
x_2


Retrato de fase de $\dot{x} = A_2 x$
1
0.75
0.5
0.25
0
−0.25
−0.5
−0.75
−1
−1
−0.75
−0.5
−0.25
0
0.25
0.5
0.75
1
x_1
x_2



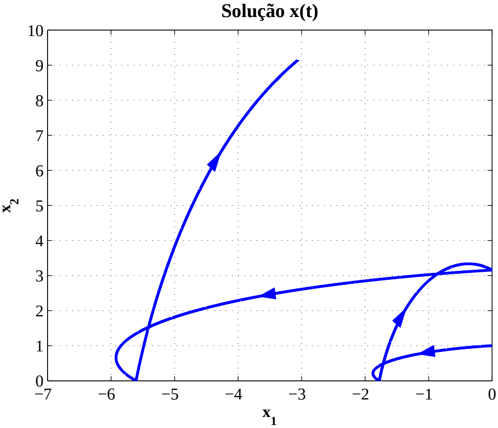
$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$$





$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } \sigma(t^-) = 1 \text{ e } x_2(t) = 0, \\ 1 & \text{se } \sigma(t^-) = 2 \text{ e } x_1(t) = 0. \end{cases}$$


Solução x(t)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
x_1
x_2

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t)), \qquad \sigma \in \mathcal{G},$$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \qquad \sigma \in \mathscr{G},$$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad \sigma \in \mathcal{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathcal{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \qquad \sigma \in \mathscr{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\mathscr{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{I}$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \qquad \sigma \in \mathcal{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathcal{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\mathcal{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{I}$ mensurável

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \qquad \sigma \in \mathscr{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\mathscr{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{I} \text{ mensurável } | \sigma \text{ é constante por partes}$$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad \sigma \in \mathcal{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathcal{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\mathcal{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{I}$ mensurável $|\sigma$ é constante por partes e possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado$\}$

Análise da estabilidade: chaveamento arbitrário

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad \sigma \in \mathscr{G},$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$\mathscr{G} = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{I} \text{ mensurável } \mid \sigma \text{ é constante por partes e possui um número finito de descontinuidades em todo intervalo de tempo limitado}\}$$

Em geral, $\mathscr{I} = \{1, \ldots, N\}$.

Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)

Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)

Procurar $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ que seja função de Lyapunov para todos os sistemas $\dot{x} = A_k x$.

Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)

Procurar $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ que seja função de Lyapunov para todos os sistemas $\dot{x} = A_k x$.

P simétrica definida positiva.

Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)

Procurar $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ que seja função de Lyapunov para todos os sistemas $\dot{x} = A_k x$.

P simétrica definida positiva.

Decrescimento ao longo das trajetórias: $PA_k + A_k^{\mathrm{T}}P \prec 0$.

Função de Lyapunov quadrática comum (CQLF)

Procurar $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ que seja função de Lyapunov para todos os sistemas $\dot{x} = A_k x$.

P simétrica definida positiva.

Decrescimento ao longo das trajetórias: $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$.

Condição suficiente (mas não necessária) para GUES.

CQLF: Algoritmos numéricos

CQLF: Algoritmos numéricos

Existência de CQLF $\iff$ existência de P simétrica positiva definida com $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$ (LMI).

CQLF: Algoritmos numéricos

Existência de CQLF $\iff$ existência de P simétrica positiva definida com $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$ (LMI).

Pode-se procurar numericamente por uma solução de $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0, \forall k$.

CQLF: Algoritmos numéricos

Existência de CQLF $\iff$ existência de P simétrica positiva definida com $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$ (LMI).

Pode-se procurar numericamente por uma solução de $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0, \forall k$.

Há algoritmos numéricos eficientes que garantem a convergência para uma tal P quando ela existir.

CQLF: Algoritmos numéricos

Existência de CQLF $\iff$ existência de P simétrica positiva definida com $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$ (LMI).

Pode-se procurar numericamente por uma solução de $PA_k + A_k^{\mathrm{T}} P \prec 0$, $\forall k$.

Há algoritmos numéricos eficientes que garantem a convergência para uma tal P quando ela existir.

Desvantagem: não ajudam a entender melhor o problema.

CQLF: Condições suficientes de existência

CQLF: Condições suficientes de existência

Teorema

Suponhamos que as matrizes Hurwitz $A_1, \ldots, A_N$ sejam simultaneamente triangularizáveis. Então o sistema chaveado correspondente admite uma CQLF.

CQLF: Condições suficientes de existência

Teorema

Suponhamos que as matrizes Hurwitz $A_1, \ldots, A_N$ *sejam simultaneamente triangularizáveis. Então o sistema chaveado correspondente admite uma CQLF.*

Reformulação em termos de álgebras de Lie.

CQLF: Condições suficientes de existência

Teorema

Suponhamos que as matrizes Hurwitz $A_1, \ldots, A_N$ sejam simultaneamente triangularizáveis. Então o sistema chaveado correspondente admite uma CQLF.

Reformulação em termos de álgebras de Lie.

Há outras classes de matrizes que admitem uma CQLF (exemplo: matrizes normais, matrizes que comutam).

CQLF: Condições necessárias e suficientes

CQLF: Condições necessárias e suficientes

Teorema

Sejam A_1 *e* A_2 *duas matrizes Hurwitz de* $\mathbb{R}^{d\times d}$ *com* $\mathrm{posto}(A_2 - A_1) = 1$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes* A_1 *e* A_2*;*
2. *todas as matrizes* $A_1 + \alpha A_2$, $\alpha \geq 0$, *são não-singulares;*
3. *a matriz* $A_1 A_2$ *não possui autovalores reais negativos.*

CQLF: Condições necessárias e suficientes

Teorema

Sejam A_1 e A_2 duas matrizes Hurwitz de $\mathbb{R}^{d\times d}$ com $\operatorname{posto}(A_2 - A_1) = 1$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes A_1 e A_2;*
2. *todas as matrizes $A_1 + \alpha A_2$, $\alpha \geq 0$, são não-singulares;*
3. *a matriz $A_1 A_2$ não possui autovalores reais negativos.*

Aplicação: $\dot{x} = Ax + bu$, controle u escalar, realimentação $u = -k^{\mathrm{T}} x$.

CQLF: Condições necessárias e suficientes

Teorema

Sejam A_1 *e* A_2 *duas matrizes Hurwitz de* $\mathbb{R}^{d\times d}$ *com* $\operatorname{posto}(A_2 - A_1) = 1$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes* A_1 *e* A_2*;*
2. *todas as matrizes* $A_1 + \alpha A_2$, $\alpha \geq 0$, *são não-singulares;*
3. *a matriz* $A_1 A_2$ *não possui autovalores reais negativos.*

Aplicação: $\dot{x} = Ax + bu$, controle u escalar, realimentação $u = -k^{\mathrm{T}} x$.

$$\dot{x} = (A - \sigma(t) b k^{\mathrm{T}}) x, \qquad \sigma \in \{0, 1\}.$$

CQLF: Condições necessárias e suficientes

Teorema

Sejam A_1 *e* A_2 *duas matrizes Hurwitz de* $\mathbb{R}^{d\times d}$ *com* $\operatorname{posto}(A_2 - A_1) = 1$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *existe uma CQLF para o sistema chaveado linear correspondente às matrizes* A_1 *e* A_2*;*
2. *todas as matrizes* $A_1 + \alpha A_2$, $\alpha \geq 0$, *são não-singulares;*
3. *a matriz* $A_1 A_2$ *não possui autovalores reais negativos.*

Aplicação: $\dot{x} = Ax + bu$, controle u escalar, realimentação $u = -k^{\mathrm{T}} x$.

$$\dot{x} = (A - \sigma(t) bk^{\mathrm{T}})x, \qquad \sigma \in \{0, 1\}.$$

Neste caso, $A_1 = A$ e $A_2 = A - bk^{\mathrm{T}}$ diferem de bk^{T}, que tem posto 1.

CQLF: Considerações gerais

CQLF: Considerações gerais

Existência de diversos critérios com base em CQLF.

CQLF: Considerações gerais

Existência de diversos critérios com base em CQLF.

Condições necessárias e suficientes gerais de difícil obtenção.

CQLF: Considerações gerais

Existência de diversos critérios com base em CQLF.

Condições necessárias e suficientes gerais de difícil obtenção.

Critérios muito restritivos: há sistemas estáveis sem CQLF.

Outros tipos de Funções de Lyapunov

Outros tipos de Funções de Lyapunov

CQLFs nem sempre existem para um sistema chaveado GUES

Outros tipos de Funções de Lyapunov

CQLFs nem sempre existem para um sistema chaveado GUES

Encontrar funções de Lyapunov sob formas mais gerais.

Outros tipos de Funções de Lyapunov

CQLFs nem sempre existem para um sistema chaveado GUES

Encontrar funções de Lyapunov sob formas mais gerais.

Vantagem: critérios mais gerais.

Outros tipos de Funções de Lyapunov

CQLFs nem sempre existem para um sistema chaveado GUES

Encontrar funções de Lyapunov sob formas mais gerais.

Vantagem: critérios mais gerais.

Desvantagem: mais difícil de se obter critérios e critérios mais complicados de se aplicar.

Funções de Lyapunov quadráticas chaveadas

Funções de Lyapunov quadráticas chaveadas

Ideia: tomar uma função de Lyapunov quadrática para cada subsistema e agrupá-las.

Funções de Lyapunov quadráticas chaveadas

Ideia: tomar uma função de Lyapunov quadrática para cada subsistema e agrupá-las.

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}} P_{\sigma(t)} x$$

com $P_k A_k + A_k^{\mathrm{T}} P_k \prec 0$.

Funções de Lyapunov quadráticas chaveadas

Ideia: tomar uma função de Lyapunov quadrática para cada subsistema e agrupá-las.

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}} P_{\sigma(t)} x$$

com $P_k A_k + A_k^{\mathrm{T}} P_k \prec 0$.

Tal função V é definida positiva e basta estabelecer seu decrescimento ao longo das trajetórias, o que pode ser feito via LMIs.

Funções de Lyapunov lineares por partes

Funções de Lyapunov lineares por partes

$$V(x) = \left\| W^{\mathrm{T}} x \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le m} \left| w_i^{\mathrm{T}} x \right|$$

com $w_i \in \mathbb{R}^d$ e $W \in \mathbb{R}^{d \times m}$ composta pelos vetores coluna w_i.

Funções de Lyapunov lineares por partes

$$V(x) = \left\| W^{\mathrm{T}} x \right\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le m} \left| w_i^{\mathrm{T}} x \right|$$

com $w_i \in \mathbb{R}^d$ e $W \in \mathbb{R}^{d \times m}$ composta pelos vetores coluna w_i.
Vantagem: a existência de uma função de Lyapunov linear por partes é *necessária e suficiente* para a estabilidade exponencial.

Funções de Lyapunov lineares por partes

$$V(x) = \left\| W^{\mathrm{T}} x \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left| w_i^{\mathrm{T}} x \right|$$

com $w_i \in \mathbb{R}^d$ e $W \in \mathbb{R}^{d \times m}$ composta pelos vetores coluna w_i.

Vantagem: a existência de uma função de Lyapunov linear por partes é *necessária e suficiente* para a estabilidade exponencial.

Teorema

A função $V(x) = \left\| W^T x \right\|_\infty$ é uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ se e somente se $m \ge d$, W for de posto d e existir $Q_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, cada uma possuindo uma diagonal negativa estritamente dominante, tal que

$$A_i^T W = W Q_i^T, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Funções de Lyapunov lineares por partes

$$V(x) = \left\| W^{\mathrm{T}} x \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \left| w_i^{\mathrm{T}} x \right|$$

com $w_i \in \mathbb{R}^d$ e $W \in \mathbb{R}^{d \times m}$ composta pelos vetores coluna w_i.
Vantagem: a existência de uma função de Lyapunov linear por partes é *necessária e suficiente* para a estabilidade exponencial.

Teorema

A função $V(x) = \left\| W^T x \right\|_\infty$ é uma função de Lyapunov linear por partes para o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ se e somente se $m \ge d$, W for de posto d e existir $Q_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, cada uma possuindo uma diagonal negativa estritamente dominante, tal que

$$A_i^T W = W Q_i^T, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Generalização possível: $V(x) = \left\| W^{\mathrm{T}} x \right\|_p$.

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$. *Então, são equivalentes:*

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$. *Então, são equivalentes:*

1. *O sistema é GUES.*

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$. *Então, são equivalentes:*

1. *O sistema é GUES.*
2. *Existe uma função de Lyapunov* V *da forma* $V(x) = x^T L(x) x$ *com* $L(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $V(0) = 0$ *e* $L(x)^T = L(x) = L(\tau x)$ *para* $x \neq 0, \tau \neq 0$.

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$*. Então, são equivalentes:*

1. *O sistema é GUES.*
2. *Existe uma função de Lyapunov* V *da forma* $V(x) = x^T L(x) x$ *com* $L(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $V(0) = 0$ *e* $L(x)^T = L(x) = L(\tau x)$ *para* $x \neq 0$, $\tau \neq 0$.
3. *Existe* V *da forma* $V(x) = \max_{1\leq i\leq m}\left(w_i^T x\right)^2$.

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$. Então, são equivalentes:

1. *O sistema é GUES.*
2. *Existe uma função de Lyapunov V da forma $V(x) = x^T L(x) x$ com $L(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $V(0) = 0$ e $L(x)^T = L(x) = L(\tau x)$ para $x \neq 0$, $\tau \neq 0$.*
3. *Existe V da forma $V(x) = \max_{1\leq i\leq m} \left(w_i^T x\right)^2$.*
4. *Existe V da forma $V(x) = \max_{1\leq i\leq m} \left|w_i^T x\right|$.*

Teoremas recíprocos de Lyapunov

Procurar tipos de funções de Lyapunov que sejam *necessárias e suficientes* para a estabilidade exponencial.

Teorema

Consideremos o sistema chaveado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$. *Então, são equivalentes:*

1. *O sistema é GUES.*
2. *Existe uma função de Lyapunov* V *da forma* $V(x) = x^T L(x) x$ *com* $L(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $V(0) = 0$ *e* $L(x)^T = L(x) = L(\tau x)$ *para* $x \neq 0$, $\tau \neq 0$.
3. *Existe* V *da forma* $V(x) = \max_{1\leq i\leq m} \left(w_i^T x\right)^2$.
4. *Existe* V *da forma* $V(x) = \max_{1\leq i\leq m} \left|w_i^T x\right|$.
5. *Existe* V *de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *homogênea de grau* $2p$, $p \geq 1$, *da forma* $V(x) = \sum_{i=1}^m \left(w_i^T x\right)^{2p}$.

Vários tipos de funções de Lyapunov.

Vários tipos de funções de Lyapunov.

Dificuldade de obtenção de critérios para estas funções.

Vários tipos de funções de Lyapunov.

Dificuldade de obtenção de critérios para estas funções.

A função de Lyapunov que existe pode ser arbitrariamente complicada.

Vários tipos de funções de Lyapunov.

Dificuldade de obtenção de critérios para estas funções.

A função de Lyapunov que existe pode ser arbitrariamente complicada.

Teorema

Seja um sistema chaveado linear definido pela família de matrizes $\{A_k, k \in \mathscr{I}\}$, e suponhamos esta família compacta. Se este sistema for GUES, então ele admite uma função de Lyapunov polinomial.

Vários tipos de funções de Lyapunov.

Dificuldade de obtenção de critérios para estas funções.

A função de Lyapunov que existe pode ser arbitrariamente complicada.

Teorema

Seja um sistema chaveado linear definido pela família de matrizes $\{A_k, k \in \mathscr{I}\}$*, e suponhamos esta família compacta. Se este sistema for GUES, então ele admite uma função de Lyapunov polinomial.*

Mas: a função de Lyapunov polinomial mais simples pode ter grau arbitrariamente elevado.

Princípios variacionais

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ o “mais instável” o possível.

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ o "mais instável" o possível.

Exemplo: dois subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + u(t)(A_2 - A_1)x(t), \qquad u(t) \in \{0, 1\}$$

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ o "mais instável" o possível.

Exemplo: dois subsistemas:

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ o "mais instável" o possível.

Exemplo: dois subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + u(t)(A_2 - A_1)x(t), \qquad u(t) \in [0, 1]$$

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ o "mais instável" o possível.

Exemplo: dois subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + u(t)(A_2 - A_1)x(t), \qquad u(t) \in [0, 1]$$

Uso de técnicas de controle ótimo para maximizar o crescimento exponencial da norma.

Princípios variacionais

Ideia: procurar o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ que deixa $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ o “mais instável” o possível.

Exemplo: dois subsistemas:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + u(t)(A_2 - A_1)x(t), \qquad u(t) \in [0, 1]$$

Uso de técnicas de controle ótimo para maximizar o crescimento exponencial da norma.

Se a “pior trajetória” for estável, então o sistema é estável.

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \qquad \sigma(t) \in \{1,2\}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \qquad \sigma(t) \in \{1,2\}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Princípios variacionais: caracterização completa da estabilidade de um sistema chaveado planar a dois subsistemas.

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \qquad \sigma(t) \in \{1, 2\}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Princípios variacionais: caracterização completa da estabilidade de um sistema chaveado planar a dois subsistemas.

Procedimento: o cálculo de certas quantidades a partir das matrizes A_1 e A_2 permite caracterizar a estabilidade.

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x, \qquad \sigma(t) \in \{1,2\}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Princípios variacionais: caracterização completa da estabilidade de um sistema chaveado planar a dois subsistemas.

Procedimento: o cálculo de certas quantidades a partir das matrizes A_1 e A_2 permite caracterizar a estabilidade.

Dificuldade: 20 casos.

Sistema chaveado planar a dois subsistemas

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x, \qquad \sigma(t) \in \{1,2\}, \qquad x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Princípios variacionais: caracterização completa da estabilidade de um sistema chaveado planar a dois subsistemas.

Procedimento: o cálculo de certas quantidades a partir das matrizes A_1 e A_2 permite caracterizar a estabilidade.

Dificuldade: 20 casos.

Solução: uso de funções de Lyapunov e princípios variacionais simultaneamente.

Dadas $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Hurwitz, calculam-se quantidades $\Gamma(A_1, A_2)$, $d(A_1, A_2) = \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$ e $\mathscr{R}$ dependentes apenas das matrizes A_1 e A_2 que permitem verificar a estabilidade (ver cálculo no trabalho impresso).

Dadas $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Hurwitz, calculam-se quantidades $\Gamma(A_1, A_2)$, $d(A_1, A_2) = \sqrt{\det(A_1)\det(A_2)}$ e $\mathscr{R}$ dependentes apenas das matrizes A_1 e A_2 que permitem verificar a estabilidade (ver cálculo no trabalho impresso).

Teorema

A estabilidade do sistema chaveado definido por A_1 e A_2 pode ser estudada segundo os quatro casos a seguir.

1. *Se $\Gamma(A_1, A_2) > -d(A_1, A_2)$ e $\mathrm{Tr}(A_1 A_2) > -2d(A_1, A_2)$, então o sistema admite uma CQLF e é portanto GUES.*
2. *Se $\Gamma(A_1, A_2) < -d(A_1, A_2)$, então o sistema é instável.*
3. *Se $\Gamma(A_1, A_2) = -d(A_1, A_2)$, então o sistema é estável, mas não assintoticamente.*
4. *Se $\Gamma(A_1, A_2) > d(A_1, A_2)$ e $\mathrm{Tr}(A_1 A_2) \leq -2d(A_1, A_2)$, então o sistema é GUES se $\mathscr{R} < 1$, estável mas não assintoticamente se $\mathscr{R} = 1$ e instável se $\mathscr{R} > 1$.*

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

σ pertence a uma classe restrita de sinais.

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

σ pertence a uma classe restrita de sinais.

As restrições podem ser em tempo ou no estado.

Análise da estabilidade: chaveamento restrito

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad \sigma(t) \in \mathscr{I}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

σ pertence a uma classe restrita de sinais.

As restrições podem ser em tempo ou no estado.

Uso de informações parciais sobre a lógica de chaveamento que auxiliam a análise.

Restrição pelo tempo

Tempo de permanência

Restrição pelo tempo

Tempo de permanência

A cada chaveamento, o sistema permanece no novo subsistema por um tempo uniformemente minorado.

Restrição pelo tempo

Tempo de permanência

A cada chaveamento, o sistema permanece no novo subsistema por um tempo uniformemente minorado.

Definição

$\tau_p \in \mathbb{R}$ é um *tempo de permanência* do sinal de chaveamento σ se o intervalo de tempo entre dois chaveamentos consecutivos de σ é maior ou igual a τ_p. Notamos por $\mathscr{S}(\tau_p)$ a classe dos sinais de chaveamento com tempo de permanência τ_p.

Restrição pelo tempo

Tempo de permanência

A cada chaveamento, o sistema permanece no novo subsistema por um tempo uniformemente minorado.

Definição

$\tau_p \in \mathbb{R}$ é um *tempo de permanência* do sinal de chaveamento σ se o intervalo de tempo entre dois chaveamentos consecutivos de σ é maior ou igual a τ_p. Notamos por $\mathscr{S}(\tau_p)$ a classe dos sinais de chaveamento com tempo de permanência τ_p.

Teorema

Seja o sistema chaveado linear $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ com $\sigma \in \mathscr{S}(\tau_p)$ definido pelas matrizes Hurwitz $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Então existe $\tau_p^\star$ tal que, se $\tau_p > \tau_p^\star$, o sistema chaveado é exponencialmente estável.

Excitação persistente

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Objetivo: estabilização por realimentação de estado linear $u(t) = -Kx(t)$.

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Objetivo: estabilização por realimentação de estado linear $u(t) = -Kx(t)$.

$$\dot{x}(t) = (A - \sigma(t)BK)x(t).$$

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Objetivo: estabilização por realimentação de estado linear $u(t) = -Kx(t)$.

$$\dot{x}(t) = (A - \sigma(t)BK)x(t).$$

A pode não ser exponencialmente estável; assim, é necessário que σ não permaneça muito em 0.

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Objetivo: estabilização por realimentação de estado linear $u(t) = -Kx(t)$.

$$\dot{x}(t) = (A - \sigma(t)BK)x(t).$$

A pode não ser exponencialmente estável; assim, é necessário que σ não permaneça muito em 0.

Condição de excitação persistente: existem $T \geq \mu > 0$ tais que

$$\int_t^{t+T} \sigma(s)\,ds \geq \mu, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Excitação persistente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)Bu(t), \qquad \sigma(t) \in [0,1]$$

Objetivo: estabilização por realimentação de estado linear $u(t) = -Kx(t)$.

$$\dot{x}(t) = (A - \sigma(t)BK)x(t).$$

A pode não ser exponencialmente estável; assim, é necessário que σ não permaneça muito em 0.

Condição de excitação persistente: existem $T \geq \mu > 0$ tais que

$$\int_t^{t+T} \sigma(s)\,ds \geq \mu, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Sinais a excitação persistente: $\mathcal{G}(T,\mu)$.

Teorema

Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^d$ um par controlável e suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos T, μ com $T \geq \mu > 0$, existe $K \in \mathbb{R}^d$ tal que a realimentação de estado $u = -K^T x$ estabiliza exponencialmente o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t)$ com $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Teorema

Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^d$ *um par controlável e suponha que os autovalores de* A *possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos* T, μ *com* $T \geq \mu > 0$*, existe* $K \in \mathbb{R}^d$ *tal que a realimentação de estado* $u = -K^T x$ *estabiliza exponencialmente o sistema* $\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t)$ *com* $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Estabilização possível se a dinâmica de A divergir no máximo polinomialmente.

Teorema

Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^d$ um par controlável e suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos T, μ com $T \geq \mu > 0$, existe $K \in \mathbb{R}^d$ tal que a realimentação de estado $u = -K^T x$ estabiliza exponencialmente o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t)$ com $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Estabilização possível se a dinâmica de A divergir no máximo polinomialmente.

É possível estabilizar a taxa de convergência arbitrária?

Teorema

Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^d$ um par controlável e suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos T, μ com $T \geq \mu > 0$, existe $K \in \mathbb{R}^d$ tal que a realimentação de estado $u = -K^T x$ estabiliza exponencialmente o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t)$ com $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Estabilização possível se a dinâmica de A divergir no máximo polinomialmente.

É possível estabilizar a taxa de convergência arbitrária? Isto é, dado $\lambda > 0$, existe K tal que $u = -K^\mathrm{T} x$ estabiliza o sistema com $\|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|x(0)\|$?

Teorema

Seja $(A, b) \in \mathbb{R}^{d\times d} \times \mathbb{R}^d$ um par controlável e suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa ou nula. Então, para todos T, μ com $T \geq \mu > 0$, existe $K \in \mathbb{R}^d$ tal que a realimentação de estado $u = -K^T x$ estabiliza exponencialmente o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t)$ com $\sigma \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Estabilização possível se a dinâmica de A divergir no máximo polinomialmente.

É possível estabilizar a taxa de convergência arbitrária? Isto é, dado $\lambda > 0$, existe K tal que $u = -K^{\mathrm{T}} x$ estabiliza o sistema com $\|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda t} \|x(0)\|$?

A resposta depende de μ/T: para μ/T grande, sim; para μ/T pequeno, não.

Não se pode estabilizar o sistema a taxa de convergência arbitrária quando μ/T é pequeno devido às variações rápidas que $\sigma(t)$ pode ter.

Não se pode estabilizar o sistema a taxa de convergência arbitrária quando μ/T é pequeno devido às variações rápidas que $\sigma(t)$ pode ter.

Limitando as variações de $\sigma(t)$, é possível recuperar a taxa arbitrária de convergência?

Não se pode estabilizar o sistema a taxa de convergência arbitrária quando μ/T é pequeno devido às variações rápidas que $\sigma(t)$ pode ter.

Limitando as variações de $\sigma(t)$, é possível recuperar a taxa arbitrária de convergência?

$\mathscr{D}(T, \mu, M)$: sinais a excitação persistente (T, μ) lipschitzianos com constante de Lipschitz limitada por M.

Não se pode estabilizar o sistema a taxa de convergência arbitrária quando μ/T é pequeno devido às variações rápidas que $\sigma(t)$ pode ter.

Limitando as variações de $\sigma(t)$, é possível recuperar a taxa arbitrária de convergência?

$\mathscr{D}(T, \mu, M)$: sinais a excitação persistente (T, μ) lipschitzianos com constante de Lipschitz limitada por M.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t) bu(t), \qquad \sigma \in \mathscr{D}(T, \mu, M).$$

Não se pode estabilizar o sistema a taxa de convergência arbitrária quando μ/T é pequeno devido às variações rápidas que $\sigma(t)$ pode ter.

Limitando as variações de $\sigma(t)$, é possível recuperar a taxa arbitrária de convergência?

$\mathcal{D}(T,\mu,M)$: sinais a excitação persistente (T,μ) lipschitzianos com constante de Lipschitz limitada por M.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sigma(t)bu(t), \qquad \sigma \in \mathcal{D}(T,\mu,M).$$

Teorema

Seja o sistema acima com $(A,b) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^2$ controlável. Sejam T, μ e M constantes positivas com $T \geq \mu$. Então este sistema pode ser estabilizado com taxa de convergência arbitrária: para todo λ, existe $K \in \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $\sigma \in \mathcal{D}(T,\mu,M)$ e toda solução x, tem-se $\|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|x(0)\|$.

Restrição pelo estado

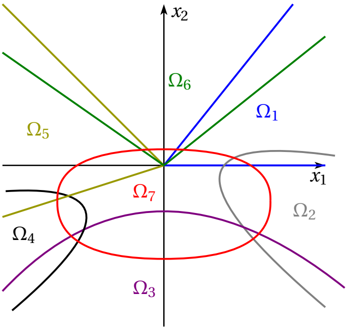
Restrição pelo estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \qquad \sigma(t) = \varphi(x(t)).$$

Restrição pelo estado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \qquad \sigma(t) = \varphi(x(t)).$$

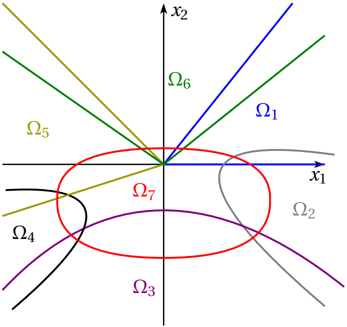
Exemplo: $N = 7$



Restrição pelo estado

$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k.$$

Exemplo: $N = 7$



$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k$$

$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k$$

Procurar $V_k(x) = x^{\mathrm{T}} P_k x$ sobre cada região Ω_k.

$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k$$

Procurar $V_k(x) = x^T P_k x$ sobre cada região Ω_k.

Exigimos $\alpha_k \|x\|^2 \leq V_k(x) \leq \beta_k \|x\|^2$ sobre Ω_k.

$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k$$

Procurar $V_k(x) = x^{\mathrm{T}} P_k x$ sobre cada região Ω_k.

Exigimos $\alpha_k \|x\|^2 \leq V_k(x) \leq \beta_k \|x\|^2$ sobre Ω_k.

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}(\alpha_k I - P_k)x \leq 0, &\qquad x \in \Omega_k \\ x^{\mathrm{T}}(P_k - \beta_k I)x \leq 0, &\qquad x \in \Omega_k \\ x^{\mathrm{T}}(A_k^{\mathrm{T}} P_k + P_k A_k)x < 0, &\qquad x \in \Omega_k \\ x^{\mathrm{T}} P_m x \leq x^{\mathrm{T}} P_k x, &\qquad x \in \Omega_{k,m} \end{aligned}$$

$$\dot{x} = A_k x, \qquad x \in \Omega_k$$

Procurar $V_k(x) = x^{\mathrm{T}} P_k x$ sobre cada região Ω_k.

Exigimos $\alpha_k \|x\|^2 \leq V_k(x) \leq \beta_k \|x\|^2$ sobre Ω_k.

$$x^{\mathrm{T}}(\alpha_k I - P_k)x \leq 0, \qquad x \in \Omega_k$$
$$x^{\mathrm{T}}(P_k - \beta_k I)x \leq 0, \qquad x \in \Omega_k$$
$$x^{\mathrm{T}}(A_k^{\mathrm{T}} P_k + P_k A_k)x < 0, \qquad x \in \Omega_k$$
$$x^{\mathrm{T}} P_m x \leq x^{\mathrm{T}} P_k x, \qquad x \in \Omega_{k,m}$$

Supomos $\Omega_k = \{x \mid x^{\mathrm{T}} Q_k x \geq 0\}$, $\Omega_{k,m} = \{x \mid x^{\mathrm{T}} Q_{k,m} x \geq 0\}$.

Teorema

O sistema $\dot{x} = A_k x$, $x \in \Omega_k$ é exponencialmente estável se existirem matrizes simétricas P_k, $k \in \{1, \ldots, N\}$ e escalares $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mu_k \geq 0$, $\nu_k \geq 0$, $\vartheta_k \geq 0$ e $\eta_{k,m} \geq 0$, $k, m \in \{1, \ldots, N\}$, tais que

$$\begin{cases} \alpha I + \mu_k Q_k \preceq P_k \preceq \beta I - \nu_k Q_k, \\ A_k^T P_k + P_k A_k + \vartheta_k Q_k \preceq -I, \\ P_m + \eta_{k,m} Q_{k,m} \preceq P_k, \end{cases} \qquad \text{para todos } k, m \in \{1, \ldots, N\}.$$

Neste caso, temos a estimativa

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\beta/\alpha}\, e^{-\frac{1}{2\beta}t} \|x_0\|$$

em que $x(t)$ é uma trajetória com condição inicial x_0.

Estabilização pelo chaveamento

Estabilização pelo chaveamento

Dados $\dot{x}(t) = A_k x(t)$, achar $\sigma(t)$ tal que $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ seja exponencialmente estável.

Estabilização pelo chaveamento

Dados $\dot{x}(t) = A_k x(t)$, achar $\sigma(t)$ tal que $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ seja exponencialmente estável.

Alguns ou todos os subsistemas podem ser instáveis.

Estabilização quadrática

Estabilização quadrática

Objetivo: escolher σ e P de forma que $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ seja uma CQLF.

Estabilização quadrática

Objetivo: escolher σ e P de forma que $V(x) = x^{\mathrm{T}} Px$ seja uma CQLF.

Teorema

Consideremos as matrizes $A_1, \ldots, A_N$. Se existirem constantes $\alpha_k \in [0,1]$ com $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$ e tais que $A(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k A_k$ seja Hurwitz, então o sistema $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$ é quadraticamente estabilizável através do sinal de chaveamento

$$\sigma(t) = \underset{k \in \{1,\ldots,N\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ x(t)^T P A_k x(t) \right\},$$

em que P é simétrica, definida positiva e satisfaz $A(\alpha)^T P + PA(\alpha) \prec 0$. Neste caso, $V(x) = x^T Px$ é uma função de Lyapunov quadrática para o sistema.

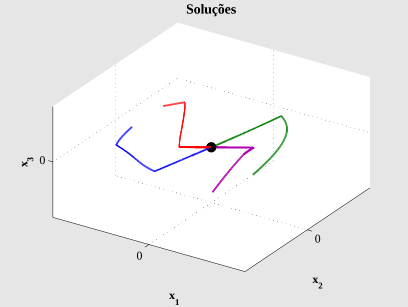
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$0,2A_1 + 0,3A_2 + 0,5A_3$ é Hurwitz.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$0,2A_1 + 0,3A_2 + 0,5A_3$ é Hurwitz.



Conclusão

Conclusão

- Estabilidade de sistemas chaveados não é uma questão trivial.

Conclusão

- Estabilidade de sistemas chaveados não é uma questão trivial.
- Muitos problemas resolvidos, mas muitos ainda em aberto.

Conclusão

- Estabilidade de sistemas chaveados não é uma questão trivial.
- Muitos problemas resolvidos, mas muitos ainda em aberto.
- Panorama das questões de estabilidade.