La condition d'excitation persistante dans les systèmes avec retard et dans une équation de transport avec amortissement

Guilherme MAZANTI

3 septembre 2013

École Polytechnique
Master M2 Mathématiques de la modélisation
Analyse numérique et EDP

Tuteurs : Yacine CHITOUR
Mario SIGALOTTI

Inria Saclay - Équipe GECO

Plan

1. Introduction
   - Systèmes à commutation
   - Systèmes à excitation persistante

Plan

Plan

Introduction

Systèmes à commutation

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- $x \in \mathbb{R}^d$: état ; $u \in \mathbb{R}^m$: commande.

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- $x \in \mathbb{R}^d$: état ; $u \in \mathbb{R}^m$: commande.
- Système à commutation : $\dot{x}(t) = f_{\alpha(t)}(x(t), u(t))$.

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- $x \in \mathbb{R}^d$: état ; $u \in \mathbb{R}^m$: commande.
- Système à commutation : $\dot{x}(t) = f_{\alpha(t)}(x(t), u(t))$.
- Famille d'applications $f_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{J}$.

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- $x \in \mathbb{R}^d$: état ; $u \in \mathbb{R}^m$: commande.
- Système à commutation : $\dot{x}(t) = f_{\alpha(t)}(x(t), u(t))$.
- Famille d'applications $f_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{J}$.
- Loi de commutation $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{J}$.

Introduction

Systèmes à commutation

- Système de commande : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.
- $x \in \mathbb{R}^d$: état ; $u \in \mathbb{R}^m$: commande.
- Système à commutation : $\dot{x}(t) = f_{\alpha(t)}(x(t), u(t))$.
- Famille d'applications $f_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $k \in \mathcal{J}$.
- Loi de commutation $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{J}$.
- Plusieurs applications en systèmes mécaniques, processus industriels, industrie automobile, systèmes électriques de puissance, etc.

Introduction

Systèmes à excitation persistante

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t),$$

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G}$$

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G} \subset L^{\infty}(\mathbb{R}_+, [0,1]).$$

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1]).$$

Principe : étudier le comportement du système uniformément par rapport à la classe $\mathcal{G}$.

Introduction
Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1]).$$

  Principe : étudier le comportement du système uniformément par rapport à la classe $\mathcal{G}$.
- Signaux à excitation persistante (PE)

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1]).$$

  Principe : étudier le comportement du système uniformément par rapport à la classe $\mathcal{G}$.

- Signaux à excitation persistante (PE) : pour $T \geq \mu > 0$, on dit que $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ si $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ est mesurable et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_t^{t+T} \alpha(s) ds \geq \mu.$$

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Système linéaire avec commutation dans la commande :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad \alpha \in \mathcal{G} \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1]).$$

  Principe : étudier le comportement du système uniformément par rapport à la classe $\mathcal{G}$.

- Signaux à excitation persistante (PE) : pour $T \geq \mu > 0$, on dit que $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ si $\alpha : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ est mesurable et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_t^{t+T} \alpha(s) ds \geq \mu.$$

- Origine : problèmes d'identification et de commande adaptative.

Introduction

Systèmes à excitation persistante

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Stabilisation des systèmes à excitation persistante par rétour d'état linéaire $u = -Kx$.

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Stabilisation des systèmes à excitation persistante par rétour d'état linéaire $u = -Kx$.
- (T, μ)-*stabilizer* : K tel que $\dot{x}(t) = (A - \alpha(t)BK)x(t)$ est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Stabilisation des systèmes à excitation persistante par rétour d'état linéaire $u = -Kx$.
- (T, μ)-*stabilizer* : K tel que $\dot{x}(t) = (A - \alpha(t)BK)x(t)$ est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.
- $\alpha \equiv 1$: *théorème de placement des pôles*.

Introduction

Systèmes à excitation persistante

- Stabilisation des systèmes à excitation persistante par rétour d'état linéaire $u = -Kx$.
- (T, μ)-*stabilizer* : K tel que $\dot{x}(t) = (A - \alpha(t)BK)x(t)$ est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.
- $\alpha \equiv 1$: *théorème de placement des pôles*.
- $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$: il y a des cas de non-existence de (T, μ)-*stabilizer*.

Équation de transport sur deux cercles

Équation de transport sur deux cercles

Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

Équation de transport sur deux cercles

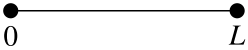
Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$

Équation de transport sur deux cercles

Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

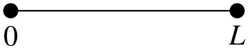
$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$



Équation de transport sur deux cercles

Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$

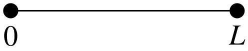


D'Alembert : décomposition de l'équation d'onde sur deux ondes qui se propagent : $u = f + g$ avec

Équation de transport sur deux cercles

Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$



D'Alembert : décomposition de l'équation d'onde sur deux ondes qui se propagent : $u = f + g$ avec

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) + \partial_x f(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ \partial_t g(t,x) - \partial_x g(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ f(t,0) = -g(t,0), & t \in \mathbb{R}_+, \\ g(t,L) = -f(t,L), & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

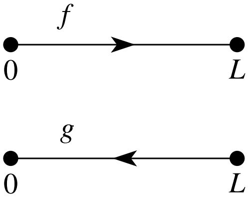
Équation de transport sur deux cercles

Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$

D'Alembert : décomposition de l'équation d'onde sur deux ondes qui se propagent : $u = f + g$ avec

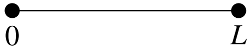
$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) + \partial_x f(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ \partial_t g(t,x) - \partial_x g(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ f(t,0) = -g(t,0), & t \in \mathbb{R}_+, \\ g(t,L) = -f(t,L), & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$



Équation de transport sur deux cercles

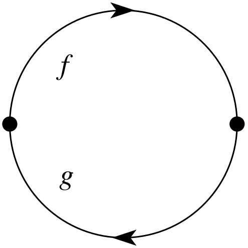
Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$



D'Alembert : décomposition de l'équation d'onde sur deux ondes qui se propagent : $u = f + g$ avec

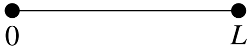
$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) + \partial_x f(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ \partial_t g(t,x) - \partial_x g(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ f(t,0) = -g(t,0), & t \in \mathbb{R}_+, \\ g(t,L) = -f(t,L), & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$



Équation de transport sur deux cercles

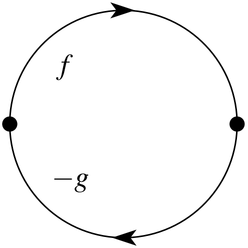
Motivation : étude de l'équation d'onde sur un réseau de cordes.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) = \partial_{xx}^2 u(t,x), & x \in [0,L], \\ u(t,x) = 0, & x \in \{0,L\}. \end{cases}$$



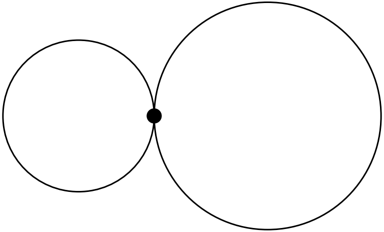
D'Alembert : décomposition de l'équation d'onde sur deux ondes qui se propagent : $u = f + g$ avec

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) + \partial_x f(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ \partial_t g(t,x) - \partial_x g(t,x) = 0, & x \in [0,L], \\ f(t,0) = -g(t,0), & t \in \mathbb{R}_+, \\ g(t,L) = -f(t,L), & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

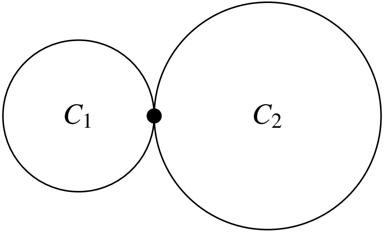


Équation de transport sur deux cercles

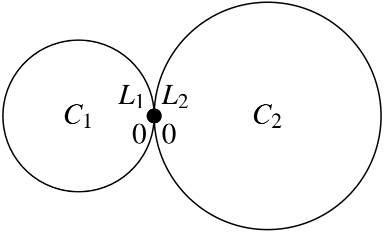
Équation de transport sur deux cercles



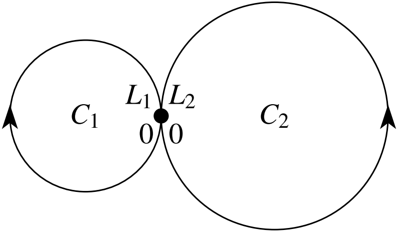
Équation de transport sur deux cercles



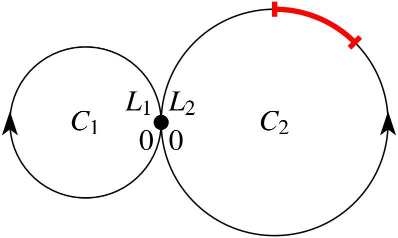
Équation de transport sur deux cercles



Équation de transport sur deux cercles



Équation de transport sur deux cercles



Équation de transport sur deux cercles

$$\begin{cases}
\partial_t u_1(t,x) + \partial_x u_1(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_1], \\
\partial_t u_2(t,x) + \partial_x u_2(t,x) + \alpha(t)\chi(x)u_2(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_2], \\
u_1(t,0) = u_2(t,0) = \dfrac{u_1(t,L_1) + u_2(t,L_2)}{2}, & t \in \mathbb{R}_+, \\
u_j(0,x) = u_{j,0}(x), & x \in [0, L_j],\ j \in \{1,2\}, \\
\alpha \in \mathcal{G}(T,\mu),
\end{cases}$$

Équation de transport sur deux cercles

Questions :

Équation de transport sur deux cercles

Questions :

- Comportement asymptotique sans amortissement.

Équation de transport sur deux cercles

Questions :

- Comportement asymptotique sans amortissement.
- Comportement asymptotique avec amortissement toujours actif (sans PE).

Équation de transport sur deux cercles

Questions :

- Comportement asymptotique sans amortissement.
- Comportement asymptotique avec amortissement toujours actif (sans PE).
- Comportement asymptotique avec amortissement à excitation persistante : peut-on retrouver le même résultat que dans le cas précédent ?

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti

On considère d'abord le système avec $\chi \equiv 0$:

$$\begin{cases} \partial_t u_j(t,x) + \partial_x u_j(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_j],\ j \in \{1,2\}, \\ u_1(t,0) = u_2(t,0) = \dfrac{u_1(t,L_1) + u_2(t,L_2)}{2}, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_j(0,x) = u_{j,0}(x), & x \in [0, L_j],\ j \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

On écrit l'équation dans l'espace de Hilbert $\mathsf{X} = L^2(0, L_1) \times L^2(0, L_2)$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

On écrit l'équation dans l'espace de Hilbert $\mathsf{X} = L^2(0, L_1) \times L^2(0, L_2)$.

$$D(A) = \left\{ (u_1, u_2) \in H^1(0, L_1) \times H^1(0, L_2) \mid u_1(0) = u_2(0) = \frac{u_1(L_1) + u_2(L_2)}{2} \right\},$$

$$A(u_1, u_2) = \left(-\frac{du_1}{dx}, -\frac{du_2}{dx} \right).$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

On écrit l'équation dans l'espace de Hilbert $\mathsf{X} = L^2(0,L_1) \times L^2(0,L_2)$.

$$D(A) = \left\{(u_1,u_2) \in H^1(0,L_1) \times H^1(0,L_2) \mid u_1(0) = u_2(0) = \frac{u_1(L_1)+u_2(L_2)}{2}\right\},$$

$$A(u_1,u_2) = \left(-\frac{du_1}{dx}, -\frac{du_2}{dx}\right).$$

Le système s'écrit

$$\dot{z} = Az$$

avec $z = (u_1,u_2)$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

On écrit l'équation dans l'espace de Hilbert $\mathsf{X} = L^2(0, L_1) \times L^2(0, L_2)$.

$$D(A) = \left\{ (u_1, u_2) \in H^1(0, L_1) \times H^1(0, L_2) \mid u_1(0) = u_2(0) = \frac{u_1(L_1) + u_2(L_2)}{2} \right\},$$

$$A(u_1, u_2) = \left(-\frac{du_1}{dx}, -\frac{du_2}{dx} \right).$$

Le système s'écrit

$$\dot{z} = Az$$

avec $z = (u_1, u_2)$.
A est fermé, densement défini, A et A^* sont dissipatifs

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cadre fonctionnel

On écrit l'équation dans l'espace de Hilbert $\mathsf{X} = L^2(0,L_1) \times L^2(0,L_2)$.

$$D(A) = \left\{ (u_1,u_2) \in H^1(0,L_1) \times H^1(0,L_2) \mid u_1(0) = u_2(0) = \frac{u_1(L_1)+u_2(L_2)}{2} \right\},$$

$$A(u_1,u_2) = \left(-\frac{du_1}{dx}, -\frac{du_2}{dx} \right).$$

Le système s'écrit

$$\dot{z} = Az$$

avec $z = (u_1,u_2)$.
A est fermé, densement défini, A et A^* sont dissipatifs $\Rightarrow$ A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu de contractions $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - comportement asymptotique

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - comportement asymptotique

Le comportement asymptotique de ce système dépend du rapport $\frac{L_1}{L_2}$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - comportement asymptotique

Le comportement asymptotique de ce système dépend du rapport $\frac{L_1}{L_2}$.
On définit $U : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ par

$$U(u_1, u_2) = \frac{1}{L_1 + L_2}\left(\int_0^{L_1} u_1(x)dx + \int_0^{L_2} u_2(x)dx\right).$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - comportement asymptotique

Le comportement asymptotique de ce système dépend du rapport $\frac{L_1}{L_2}$.
On définit $U : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ par

$$U(u_1, u_2) = \frac{1}{L_1 + L_2} \left(\int_0^{L_1} u_1(x) dx + \int_0^{L_2} u_2(x) dx \right).$$

Théorème

- *Si* $\frac{L_1}{L_2} \notin \mathbb{Q}$, *alors* $e^{tA} z \to (U(z), U(z))$ *lorsque* $t \to +\infty$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - comportement asymptotique

Le comportement asymptotique de ce système dépend du rapport $\frac{L_1}{L_2}$.
On définit $U : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ par

$$U(u_1, u_2) = \frac{1}{L_1 + L_2} \left(\int_0^{L_1} u_1(x) dx + \int_0^{L_2} u_2(x) dx \right).$$

Théorème

- *Si* $\frac{L_1}{L_2} \notin \mathbb{Q}$, *alors* $e^{tA} z \to (U(z), U(z))$ *lorsque* $t \to +\infty$.
- *Si* $\frac{L_2}{L_2} \in \mathbb{Q}$, *alors le système admet une solution périodique non-constante.*

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.
- Soient $E = \{z \in \mathsf{X} \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le sous-ensemble invariant maximal de E. Alors $D(A) \cap M$ est l'ensemble des fonctions constantes $(\lambda, \lambda) \in \mathsf{X}$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.
- Soient $E = \{z \in \mathsf{X} \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le sous-ensemble invariant maximal de E. Alors $D(A) \cap M$ est l'ensemble des fonctions constantes $(\lambda, \lambda) \in \mathsf{X}$.
  - En suivant le flot de l'équation, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ pour $t \geq L_1$ et $x \in [0, L_1]$ (on suppose $L_1 < L_2$).

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.
- Soient $E = \{z \in \mathsf{X} \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le sous-ensemble invariant maximal de E. Alors $D(A) \cap M$ est l'ensemble des fonctions constantes $(\lambda, \lambda) \in \mathsf{X}$.
  - En suivant le flot de l'équation, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ pour $t \geq L_1$ et $x \in [0, L_1]$ (on suppose $L_1 < L_2$).
  - De même, $u_j(t + L_j, x) = u_j(t,x)$, $t \geq L_j$, $x \in [0, L_j]$, $j = 1, 2$.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.
- Soient $E = \{z \in \mathsf{X} \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le sous-ensemble invariant maximal de E. Alors $D(A) \cap M$ est l'ensemble des fonctions constantes $(\lambda, \lambda) \in \mathsf{X}$.
    - En suivant le flot de l'équation, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ pour $t \geq L_1$ et $x \in [0, L_1]$ (on suppose $L_1 < L_2$).
    - De même, $u_j(t + L_j, x) = u_j(t,x)$, $t \geq L_j$, $x \in [0, L_j]$, $j = 1, 2$.
    - Donc $[L_2, +\infty) \ni t \mapsto u_1(t,x)$ est à la fois L_1-périodique et L_2-périodique, donc constante en temps.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \notin \mathbb{Q}$

- $V(z) = \|z\|_{\mathsf{X}}^2$ est une fonction de Lyapunov (non-stricte).
- L'orbite positive $\{e^{tA}z \mid t \geq 0\}$ est precompacte si $z \in D(A)$.
- Soient $E = \{z \in \mathsf{X} \mid \dot{V}(z) = 0\}$ et M le sous-ensemble invariant maximal de E. Alors $D(A) \cap M$ est l'ensemble des fonctions constantes $(\lambda, \lambda) \in \mathsf{X}$.
    - En suivant le flot de l'équation, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$ pour $t \geq L_1$ et $x \in [0, L_1]$ (on suppose $L_1 < L_2$).
    - De même, $u_j(t + L_j, x) = u_j(t,x)$, $t \geq L_j$, $x \in [0, L_j]$, $j = 1, 2$.
    - Donc $[L_2, +\infty) \ni t \mapsto u_1(t,x)$ est à la fois L_1-périodique et L_2-périodique, donc constante en temps.
- U est conservée par le flot. On conclut par LaSalle.

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{N}^*,$$

Équation de transport sur deux cercles

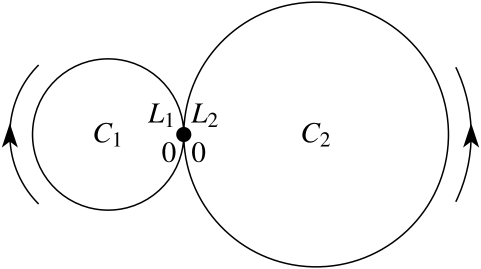
Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell = \frac{L_1}{p} = \frac{L_2}{q}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

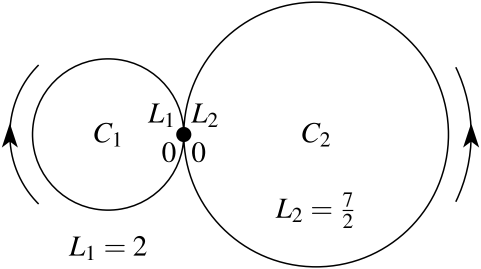
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell = \frac{L_1}{p} = \frac{L_2}{q}.$$



Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

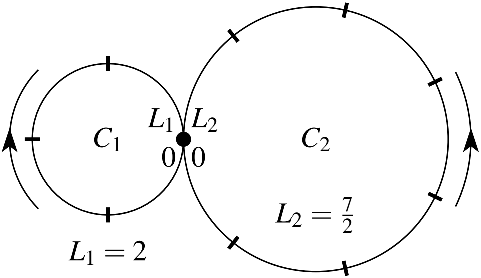
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell = \frac{L_1}{p} = \frac{L_2}{q}.$$



Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - cas $L_1/L_2 \in \mathbb{Q}$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^*, \qquad \ell = \frac{L_1}{p} = \frac{L_2}{q}.$$



Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite

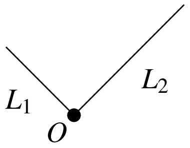
Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite

$$u_1(t,0) = \frac{1}{2}u_1(t,L_1) + \frac{1}{2}u_2(t,L_2)$$

Équation de transport sur deux cercles

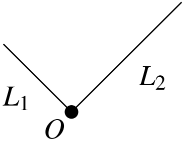
Système non-amorti - solution explicite



$$u_1(t,0) = \frac{1}{2}u_1(t,L_1) + \frac{1}{2}u_2(t,L_2)$$

Équation de transport sur deux cercles

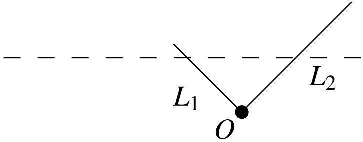
Système non-amorti - solution explicite



$$u_1(t,0) = \frac{1}{2}u_1(t-s, L_1-s) + \frac{1}{2}u_2(t-s, L_2-s), \quad 0 \leq s \leq \min\{t, L_1, L_2\}$$

Équation de transport sur deux cercles

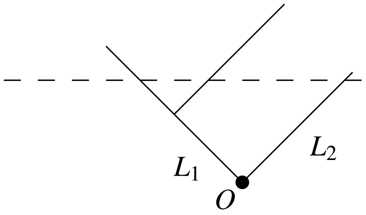
Système non-amorti - solution explicite



$$u_1(t,0) = \frac{1}{2}u_1(t-s, L_1 - s) + \frac{1}{2}u_2(t-s, L_2 - s), \quad 0 \leq s \leq \min\{t, L_1, L_2\}$$

Équation de transport sur deux cercles

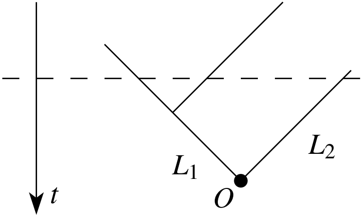
Système non-amorti - solution explicite



$$u_1(t,0) = \frac{1}{4}u_{1,0}(L_1 - (t - L_1)) + \frac{1}{4}u_{2,0}(L_2 - (t - L_1)) + \frac{1}{2}u_{2,0}(L_2 - t)$$

Équation de transport sur deux cercles

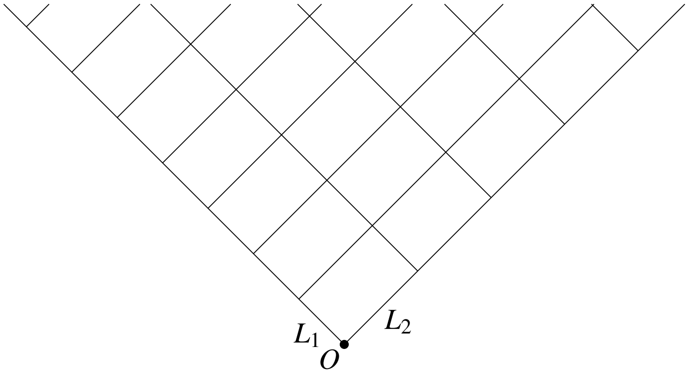
Système non-amorti - solution explicite



$$u_1(t,0) = \frac{1}{4}u_{1,0}(L_1 - (t - L_1)) + \frac{1}{4}u_{2,0}(L_2 - (t - L_1)) + \frac{1}{2}u_{2,0}(L_2 - t)$$

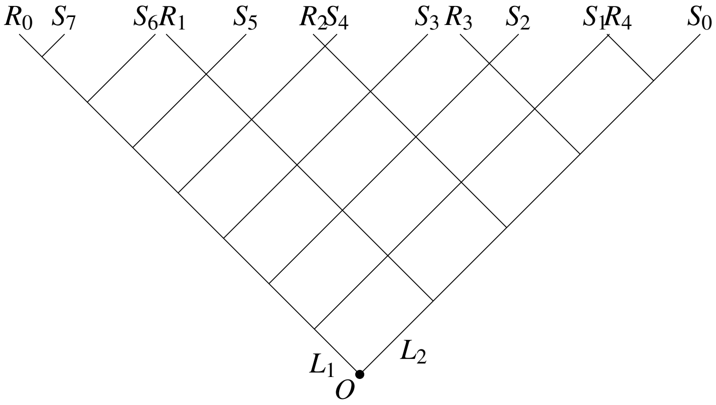
Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite



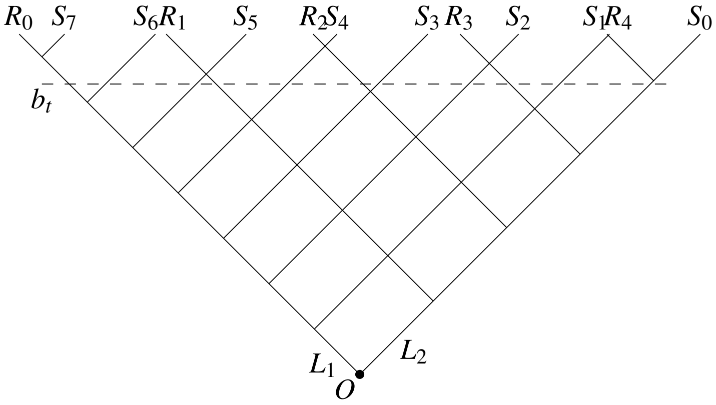
Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite



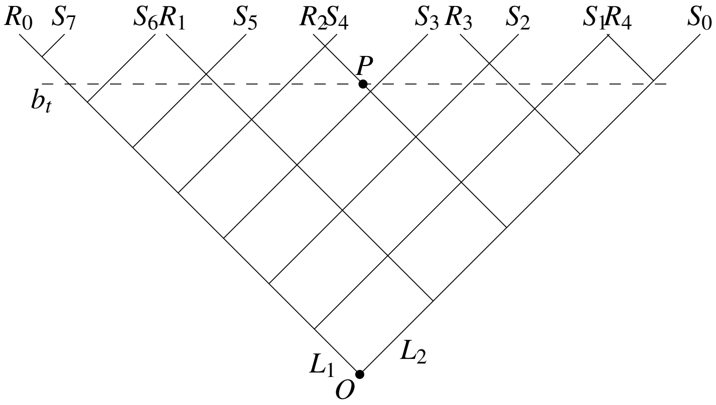
Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite



Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite



Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{\binom{n + \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n + \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor + 1}}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système non-amorti - solution explicite

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{\binom{n + \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n + \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor + 1}}$$

$$\beta_{m,t} = \frac{\binom{m + \left\lfloor \frac{t - mL_1}{L_2} \right\rfloor}{m}}{2^{m + \left\lfloor \frac{t - mL_1}{L_2} \right\rfloor + 1}}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

On considère maintenant le système avec $\alpha \equiv 1$:

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t,x) + \partial_x u_1(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_1], \\ \partial_t u_2(t,x) + \partial_x u_2(t,x) + \chi(x) u_2(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_2], \\ u_1(t,0) = u_2(t,0) = \dfrac{u_1(t,L_1) + u_2(t,L_2)}{2}, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_j(0,x) = u_{j,0}(x), & x \in [0, L_j],\ j \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

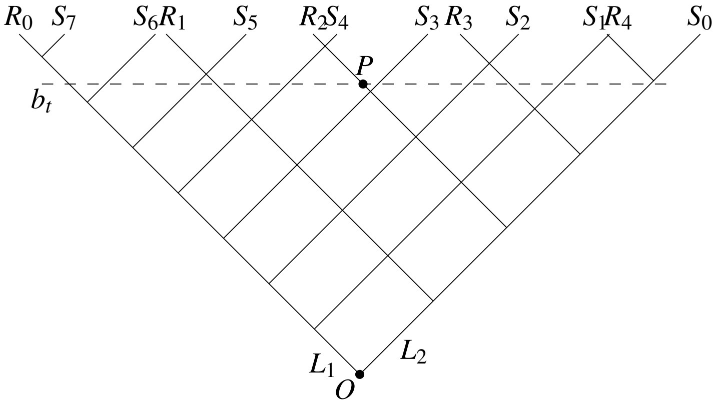
On considère maintenant le système avec $\alpha \equiv 1$:

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t,x) + \partial_x u_1(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_1], \\ \partial_t u_2(t,x) + \partial_x u_2(t,x) + \chi(x) u_2(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0, L_2], \\ u_1(t,0) = u_2(t,0) = \dfrac{u_1(t,L_1) + u_2(t,L_2)}{2}, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_j(0,x) = u_{j,0}(x), & x \in [0, L_j],\ j \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Étude via la solution explicite.

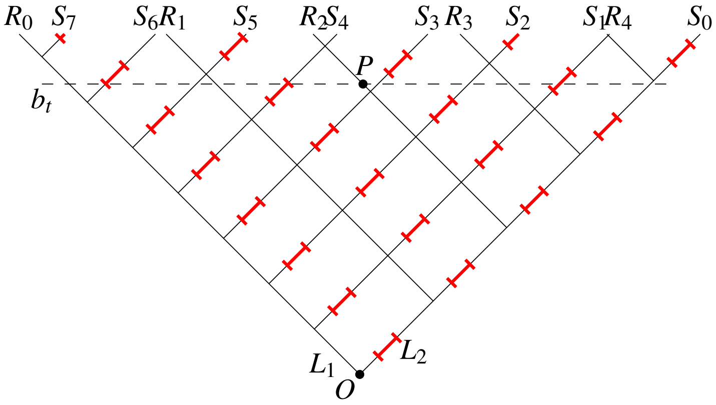
Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif



Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif



Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{\binom{n + \left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n + \left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor + 1}} \eta^n, \quad \eta = e^{-(b-a)}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{\binom{n + \left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n + \left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor + 1}} \eta^n, \quad \eta = e^{-(b-a)}$$

$$\beta_{m,t} = \frac{\binom{m + \left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor}{m}}{2^{m + \left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor + 1}} \eta^{\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor} \delta_{m,t}, \quad 0 < \delta_{m,t} \leq 1.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

- On montre que $\alpha_{n,t}$ et $\beta_{m,t}$ décroisent exponentiellement vers 0.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

- On montre que $\alpha_{n,t}$ et $\beta_{m,t}$ décroisent exponentiellement vers 0.
- Stratégie :

$$\alpha_{n,t} = \overline{\alpha}_{n,t}\eta^n, \quad \beta_{m,t} = \overline{\beta}_{m,t}\eta^{\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor}\delta_{m,t}$$

avec

$$\overline{\alpha}_{n,t} = \frac{\binom{n+\left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n+\left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor+1}}, \qquad \overline{\beta}_{m,t} = \frac{\binom{m+\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor}{m}}{2^{m+\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor+1}}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

- On montre que $\alpha_{n,t}$ et $\beta_{m,t}$ décroisent exponentiellement vers 0.
- Stratégie :

$$\alpha_{n,t} = \overline{\alpha}_{n,t}\eta^n, \quad \beta_{m,t} = \overline{\beta}_{m,t}\eta^{\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor}\delta_{m,t}$$

avec

$$\overline{\alpha}_{n,t} = \frac{\binom{n+\left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor}{n}}{2^{n+\left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor+1}}, \qquad \overline{\beta}_{m,t} = \frac{\binom{m+\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor}{m}}{2^{m+\left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor+1}}.$$

- $\overline{\alpha}_{n,t}$ et $\overline{\beta}_{m,t}$ peuvent être vus comme des coefficients binomiaux normalisés.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

Proposition

Soient $p \in (0, 1)$ *et* $0 < \mu < p < \nu < 1$. *Il existe des constantes* $C, \lambda > 0$ *telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq C e^{-\lambda n}, \qquad \forall k \in ([0, \mu n] \cup [\nu n, n]) \cap \mathbb{N}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

Proposition

Soient $p \in (0,1)$ et $0 < \mu < p < \nu < 1$. Il existe des constantes $C, \lambda > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq C e^{-\lambda n}, \qquad \forall k \in ([0, \mu n] \cup [\nu n, n]) \cap \mathbb{N}.$$

Théorème

Il existe $C, \lambda > 0$ tels que, pout tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_{n,t} &\leq C e^{-\lambda t}, & \qquad \forall n \in [0, t/L_2] \cap \mathbb{N}, \\ \beta_{m,t} &\leq C e^{-\lambda t}, & \qquad \forall m \in [0, t/L_1] \cap \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement toujours actif

Théorème

Il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que, pour toute condition initiale $z_0 \in \mathsf{X}$, la solution $z(t)$ satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$\left\|z(t)\right\|_{\mathsf{X}} \leq Ce^{-\lambda t} \left\|z_0\right\|_{\mathsf{X}}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

- But : savoir si on peut retrouver avec la PE le même comportement du système sans PE.

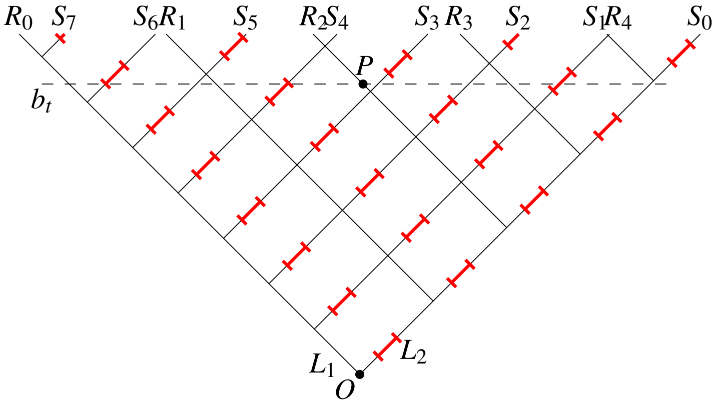
Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

- But : savoir si on peut retrouver avec la PE le même comportement du système sans PE.
- Technique : étude de la solution explicite.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante



Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$V_{n_1,n_2} = \{v = (v_1, \dots, v_{n_1+n_2}) \in \{1,2\}^{n_1+n_2} \mid \#\{j \mid v_j = 1\} = n_1\}$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$V_{n_1,n_2} = \{v = (v_1, \dots, v_{n_1+n_2}) \in \{1,2\}^{n_1+n_2} \mid \#\{j \mid v_j = 1\} = n_1\}$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{1}{2^{n_1+n_2+1}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \mid v_j = 2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - a} \alpha(t-s) ds}, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor, \, n_2 = n$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

$$u_1(t,0) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_2} \right\rfloor} \alpha_{n,t} u_{1,0}(L_1 - \{t - nL_2\}_{L_1}) + \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{t}{L_1} \right\rfloor} \beta_{m,t} u_{2,0}(L_2 - \{t - mL_1\}_{L_2})$$

$$V_{n_1,n_2} = \{v = (v_1, \dots, v_{n_1+n_2}) \in \{1,2\}^{n_1+n_2} \mid \#\{j \mid v_j = 1\} = n_1\}$$

$$\alpha_{n,t} = \frac{1}{2^{n_1+n_2+1}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \mid v_j = 2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - a} \alpha(t-s) ds}, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor, \, n_2 = n$$

$$\beta_{m,t} = \frac{1}{2^{n_1+n_2+1}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \mid v_j = 2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - a} \alpha(t-s) ds} \delta_{m,t}, \quad n_1 = m, \, n_2 = \left\lfloor \frac{t - mL_1}{L_2} \right\rfloor$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

On peut écrire

$$\alpha_{n,t} = \overline{\alpha}_{n,t} \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \,|\, v_j = 2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - a} \alpha(t-s) ds}, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{t - nL_2}{L_1} \right\rfloor, \, n_2 = n,$$

$$\beta_{m,t} = \overline{\beta}_{m,t} \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \,|\, v_j = 2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i} + L_2 - a} \alpha(t-s) ds} \delta_{m,t}, \quad n_1 = m, \, n_2 = \left\lfloor \frac{t - mL_1}{L_2} \right\rfloor,$$

avec $\overline{\alpha}_{n,t}$ et $\overline{\beta}_{m,t}$ comme dans le cas sans PE.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

On peut écrire

$$\alpha_{n,t} = \overline{\alpha}_{n,t} \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \,|\, v_j=2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-a} \alpha(t-s) ds}, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{t-nL_2}{L_1} \right\rfloor, n_2 = n,$$

$$\beta_{m,t} = \overline{\beta}_{m,t} \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \,|\, v_j=2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-a} \alpha(t-s) ds} \delta_{m,t}, \quad n_1 = m, n_2 = \left\lfloor \frac{t-mL_1}{L_2} \right\rfloor,$$

avec $\overline{\alpha}_{n,t}$ et $\overline{\beta}_{m,t}$ comme dans le cas sans PE.
Il suffit d'étudier

$$\zeta_{n_1,n_2} = \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n_2}} \sum_{v \in V_{n_1,n_2}} \prod_{j \,|\, v_j=2} e^{-\int_{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-b}^{\sum_{i=1}^{j-1} L_{v_i}+L_2-a} \alpha(t-s) ds}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

On étudie

$$\eta_{n_1,n_2} = e^{-\int_{n_1L_1+(n_2+1)L_2-b}^{n_1L_1+(n_2+1)L_2-a} \alpha(t-s)ds} = e^{-\int_{t-n_1L_1-(n_2+1)L_2+a}^{t-n_1L_1-(n_2+1)L_2+b} \alpha(s)ds}.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

On étudie

$$\eta_{n_1,n_2} = e^{-\int_{n_1 L_1+(n_2+1)L_2-b}^{n_1 L_1+(n_2+1)L_2-a} \alpha(t-s)ds} = e^{-\int_{t-n_1 L_1-(n_2+1)L_2+a}^{t-n_1 L_1-(n_2+1)L_2+b} \alpha(s)ds}.$$

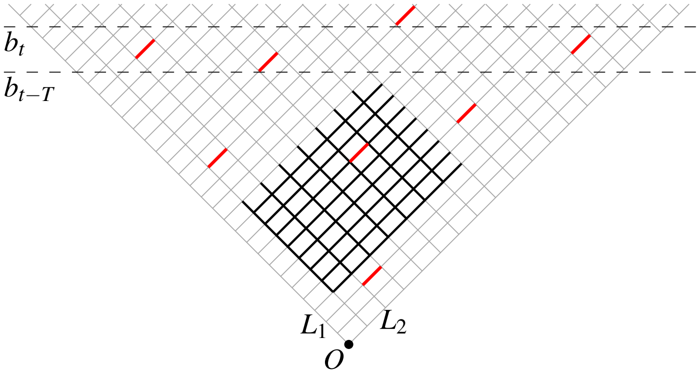
Théorème

Supposons $\frac{L_1}{L_2} \notin \mathbb{Q}$ et soient $T \geq \mu > 0$. Alors il existe $\eta \in (0,1)$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ avec $t \geq N_1 L_1 + (N_2+1)L_2$ et $t \geq T$, tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $(n_1+N_1)L_1 + (n_2+N_2)L_2 \leq t - T$ et tout $\alpha \in \mathcal{G}(T,\mu)$, il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_j \leq r_j \leq n_j + N_j$, $j \in \{1,2\}$, tels que

$$\eta_{r_1,r_2} \leq \eta.$$

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante



Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

- Repartition des intervalles où on a au moins une certaine décroissance η.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

- Repartition des intervalles où on a au moins une certaine décroissance η.
- Prochaine étape : traduire ceci en termes de la moyenne ζ_{n_1, n_2}.

Équation de transport sur deux cercles

Système avec un amortissement à excitation persistante

- Repartition des intervalles où on a au moins une certaine décroissance η.
- Prochaine étape : traduire ceci en termes de la moyenne ζ_{n_1,n_2}.
- Travail en cours...

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

par un retour d'état linéaire $u = -Kx$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

  par un retour d'état linéaire $u = -Kx$.
- On cherche K uniforme par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

par un retour d'état linéaire $u = -Kx$.

- On cherche K uniforme par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *stabilisable*

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

par un retour d'état linéaire $u = -Kx$.

- On cherche K uniforme par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Intérêt : stabilisation du système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \qquad \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$$

par un retour d'état linéaire $u = -Kx$.

- On cherche K uniforme par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle. Alors, pour tous $T \geq \mu > 0$, il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que le système $\dot{x}(t) = (A - \alpha(t)BK)x(t)$ est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- En plusieurs situation pratiques, le retour d'état $u = -Kx$ ne peut pas être fait instantanément.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- En plusieurs situation pratiques, le retour d'état $u = -Kx$ ne peut pas être fait instantanément.
- Le retour d'état devient donc $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$, avec $\tau(t) \geq 0$ un retard.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- En plusieurs situation pratiques, le retour d'état $u = -Kx$ ne peut pas être fait instantanément.
- Le retour d'état devient donc $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$, avec $\tau(t) \geq 0$ un retard.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha(t)BKx(t - \tau(t)),$$
$$\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T}).$$

On s'intéressera à la stabilisation de ce système uniformément par rapport à $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$ et $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T})$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Système d'intérêt :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathcal{G}(T,\mu).$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Système d'intérêt :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d,\, u(t) \in \mathbb{R}^m,\, \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu).$$

- Retour d'état $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha(t)BKx(t - \tau(t)), \\ &\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\, \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T}). \end{aligned} \tag{R}$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Système d'intérêt :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu).$$

- Retour d'état $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha(t)BKx(t - \tau(t)), \\ &\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T}). \end{aligned} \tag{R}$$

- $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Système d'intérêt :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu).$$

- Retour d'état $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha(t)BKx(t - \tau(t)), \\ &\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T}). \end{aligned} \tag{R}$$

- $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$.
- Condition initiale : $x(t) = x_0(t)$ pour $t \in [-r, 0]$, $x_0 \in \mathcal{C}^0([-r, 0], \mathbb{R}^d)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- Système d'intérêt :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \alpha(t)Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^d,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu).$$

- Retour d'état $u(t) = -Kx(t - \tau(t))$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha(t)BKx(t - \tau(t)), \\ &\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T}). \end{aligned} \tag{R}$$

- $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$.
- Condition initiale : $x(t) = x_0(t)$ pour $t \in [-r, 0]$, $x_0 \in \mathcal{C}^0([-r, 0], \mathbb{R}^d)$.
- Existence et unicité d'une solution : théorème de Carathéodory pour les équations avec retard. Notation : $x(t; \tau, x_0, \alpha, K)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Définition ($(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur)

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Définition ($(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur)

Soient $T \geq \mu > 0$ et $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Définition ($(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur)

Soient $T \geq \mu > 0$ et $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$. On dit que $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ est un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur pour (R)

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Définition ($(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur)

Soient $T \geq \mu > 0$ et $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$. On dit que $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ est un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur pour (R) s'il existe des constantes $C \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$, tout $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T})$, et toute condition initiale $x_0 \in \mathcal{C}^0([-r, 0], \mathbb{R}^d)$, la solution $x(t; \tau, x_0, \alpha, K)$ de (R) satisfait

$$\left\|x(t; \tau, x_0, \alpha, K)\right\| \leq C e^{-\gamma t} \sup_{s \in [-r, 0]} \left\|x_0(s)\right\|, \qquad \forall t \geq 0.$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Définition ($(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur)

Soient $T \geq \mu > 0$ et $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+$ borné, $r = \sup \mathcal{T}$. On dit que $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ est un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur pour (R) s'il existe des constantes $C \geq 1$ et $\gamma > 0$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu)$, tout $\tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{T})$, et toute condition initiale $x_0 \in \mathcal{C}^0([-r, 0], \mathbb{R}^d)$, la solution $x(t; \tau, x_0, \alpha, K)$ de (R) satisfait

$$\left\|x(t; \tau, x_0, \alpha, K)\right\| \leq C e^{-\gamma t} \sup_{s \in [-r, 0]} \left\|x_0(s)\right\|, \qquad \forall t \geq 0.$$

Si K est un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur, alors $\dot{x}(t) = Ax(t) - \alpha_\star BKx(t - \tau_\star)$ est exponentiellement stable, $\forall \alpha_\star \in [\mu/T, 1]$, $\forall \tau_\star \in \mathcal{T}$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- On dit que $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ est stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- On dit que $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ est stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz.
- Condition nécessaire pour l'existence d'un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $0 \in \mathcal{T}$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- On dit que $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ est stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz.
- Condition nécessaire pour l'existence d'un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $0 \in \mathcal{T}$.

Résultat précédent de Y. Chitour et M. Sigalotti :

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *stabilisable*

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- On dit que $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ est stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz.
- Condition nécessaire pour l'existence d'un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $0 \in \mathcal{T}$.

Résultat précédent de Y. Chitour et M. Sigalotti :

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Définitions et résultats précédents

- On dit que $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ est stabilisable s'il existe $K \in \mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ tel que $A - BK$ soit Hurwitz.
- Condition nécessaire pour l'existence d'un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $0 \in \mathcal{T}$.

Résultat précédent de Y. Chitour et M. Sigalotti :

Théorème (Chitour, Sigalotti)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle. Alors, pour tous $T \geq \mu > 0$, il existe un $(T, \mu, \{0\})$-stabilisateur pour (R).

Stabilisation par retour d'état avec retard

Résultat principal

Stabilisation par retour d'état avec retard

Résultat principal

Théorème

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *stabilisable*

Stabilisation par retour d'état avec retard

Résultat principal

Théorème

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle.*

Stabilisation par retour d'état avec retard

Résultat principal

Théorème

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ *stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle. Alors, pour tous* $T \geq \mu > 0$ *et tout* $\tau_0 \geq 0$*, il existe un voisinage* $\mathcal{T}$ *de* τ_0 *dans* $\mathbb{R}_+$ *et un* $(T, \mu, \mathcal{T})$*-stabilisateur pour* (R).

Stabilisation par retour d'état avec retard

Résultat principal

Théorème

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{d,m}(\mathbb{R})$ stabilisable avec toutes les valeurs propres de A à partie réelle négative ou nulle. Alors, pour tous $T \geq \mu > 0$ et tout $\tau_0 \geq 0$, il existe un voisinage $\mathcal{T}$ de τ_0 dans $\mathbb{R}_+$ et un $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur pour (R).

Même technique de preuve que le résultat de Chitour et Sigalotti : contraction du temps.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$*, et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$*. Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Démonstration.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Démonstration.

Trois étapes :

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$*. Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Démonstration.

Trois étapes :

- contraction du temps ;

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Démonstration.

Trois étapes :

- contraction du temps ;
- système limite ;

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur

Théorème

Soient $A = J_d$, $B = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$, *et prenons* $T \geq \mu > 0$ *et* $r > 0$. *Alors il existe un* $(T, \mu, [0, r])$*-stabilisateur* $K \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{R})$ *pour* (R).

Cas plus simple, résultat plus fort.

Démonstration.

Trois étapes :

- contraction du temps ;
- système limite ;
- conclusion.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BKx(t - \tau(t)),$$
$$\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, r]).$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BK x(t - \tau(t)), \\ & \alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, r]). \end{aligned}$$

On définit $D_{d,\nu} = \operatorname{diag}(\nu^{d-1}, \dots, \nu, 1)$ et on pose $x_\nu(t) = D_{d,\nu}^{-1} x(\nu t)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BKx(t - \tau(t)),$$
$$\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, r]).$$

On définit $D_{d,\nu} = \operatorname{diag}(\nu^{d-1}, \dots, \nu, 1)$ et on pose $x_\nu(t) = D_{d,\nu}^{-1} x(\nu t)$. Alors

$$\frac{d}{dt} x_\nu(t) = J_d x_\nu(t) - \alpha(\nu t) \nu BKD_{d,\nu} x_\nu \left(t - \frac{\tau(\nu t)}{\nu}\right).$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BKx(t - \tau(t)),\\
&\alpha \in \mathcal{G}(T, \mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, r]).
\end{aligned}$$

On définit $D_{d,\nu} = \operatorname{diag}(\nu^{d-1}, \dots, \nu, 1)$ et on pose $x_\nu(t) = D_{d,\nu}^{-1} x(\nu t)$. Alors

$$\frac{d}{dt} x_\nu(t) = J_d x_\nu(t) - \alpha(\nu t) \nu BKD_{d,\nu} x_\nu\left(t - \frac{\tau(\nu t)}{\nu}\right).$$

Donc $x_\nu(t) = x\left(t; \frac{\tau(\nu\cdot)}{\nu}, D_{d,\nu}^{-1} x_0(\nu\cdot), \alpha(\nu\cdot), \nu KD_{d,\nu}\right)$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Contraction du temps

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BKx(t-\tau(t)),\\&\alpha \in \mathcal{G}(T,\mu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+,[0,r]).\end{aligned}$$

On définit $D_{d,\nu} = \operatorname{diag}(\nu^{d-1},\dots,\nu,1)$ et on pose $x_\nu(t) = D_{d,\nu}^{-1} x(\nu t)$. Alors

$$\frac{d}{dt} x_\nu(t) = J_d x_\nu(t) - \alpha(\nu t)\nu BKD_{d,\nu} x_\nu\left(t - \frac{\tau(\nu t)}{\nu}\right).$$

Donc $x_\nu(t) = x\left(t; \frac{\tau(\nu\cdot)}{\nu}, D_{d,\nu}^{-1} x_0(\nu\cdot), \alpha(\nu\cdot), \nu KD_{d,\nu}\right)$.
Conclusion : K est un $(T,\mu,[0,r])$-stabilisateur $\iff$ $\nu KD_{d,\nu}$ est un $(T/\nu,\mu/\nu,[0,r/\nu])$-stabilisateur.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Système limite

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Système limite

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha_\star(t) BKx(t), \\
&\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1]).
\end{aligned}$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Système limite

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha_\star(t) BKx(t),$$
$$\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1]).$$

Résultat de Chitour et Sigalotti : il existe K tel que ce système est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1])$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Système limite

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha_\star(t) BKx(t),$$
$$\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1]).$$

Résultat de Chitour et Sigalotti : il existe K tel que ce système est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1])$.

Conclusion

Stabilisation par retour d'état avec retard

Le d-intégrateur - démonstration

Système limite

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha_\star(t) BKx(t),$$
$$\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1]).$$

Résultat de Chitour et Sigalotti : il existe K tel que ce système est globalement exponentiellement stable, uniformément par rapport à $\alpha_\star \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [\mu/T, 1])$.

Conclusion

K est un $(T/\nu, \mu/\nu, [0, r/\nu])$-stabilisateur de

$$\dot{x}(t) = J_d x(t) - \alpha(t) BKx(t - \tau(t)),$$
$$\alpha \in \mathcal{G}(T/\nu, \mu/\nu),\ \tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+, [0, r/\nu]),$$

pour ν suffisamment grand.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

- Réduction à un cas plus simple.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

- Réduction à un cas plus simple.
- On suit les mêmes étapes de la preuve de Chitour et Sigalotti pour $\mathcal{T} = \{0\}$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

- Réduction à un cas plus simple.
- On suit les mêmes étapes de la preuve de Chitour et Sigalotti pour $\mathcal{T} = \{0\}$.
- Dans le cas $\mathcal{T} = \{0\}$, on arrive au système limite

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = J_{r_0} y_0(t) - \displaystyle\sum_{\ell=0}^{h} [b^0 \mathcal{K}_\ell \otimes C_{0\ell}(t)] y_\ell(t), \\ \dot{y}_j(t) = J_{r_j}^C y_j(t) - \displaystyle\sum_{\ell=0}^{h} [\tilde{b}^j \mathcal{K}_\ell \otimes C_{j\ell}(t)] y_\ell(t), \quad j = 1, \ldots, h, \end{cases}$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

- Si $\mathcal{T} = [\tau_0 - r, \tau_0 + r] \cap \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = J_{r_0} y_0(t) - \displaystyle\sum_{\ell=0}^{h} [b^0 \mathcal{K}_\ell \otimes (C_{0\ell}(t) + P_{0\ell}(t))] y_\ell(t), \\ \dot{y}_j(t) = J_{r_j}^C y_j(t) - \displaystyle\sum_{\ell=0}^{h} [\tilde{b}^j \mathcal{K}_\ell \otimes (C_{j\ell}(t) + P_{j\ell}(t))] y_\ell(t), \quad j = 1, \dots, h, \end{cases}$$

avec $\left\| P_{j\ell}(t) \right\| \leq Cr$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Cas général

- Si $\mathcal{T} = [\tau_0 - r, \tau_0 + r] \cap \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \dot{y}_0(t) = J_{r_0} y_0(t) - \sum_{\ell=0}^{h} [b^0 \mathcal{K}_\ell \otimes (C_{0\ell}(t) + P_{0\ell}(t))] y_\ell(t), \\ \dot{y}_j(t) = J_{r_j}^C y_j(t) - \sum_{\ell=0}^{h} [\tilde{b}^j \mathcal{K}_\ell \otimes (C_{j\ell}(t) + P_{j\ell}(t))] y_\ell(t), \quad j = 1, \dots, h, \end{cases}$$

avec $\left\lVert P_{j\ell}(t) \right\rVert \leq Cr$.

- On conclut comme Chitour et Sigalotti en traitant les termes $P_{j\ell}$ comme des perturbations.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On prend $\mathcal{T}$ comme un voisinage de τ_0 pour pouvoir traiter $P_{j\ell}$ comme une perturbation.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On prend $\mathcal{T}$ comme un voisinage de τ_0 pour pouvoir traiter $P_{j\ell}$ comme une perturbation.
- Peut-on avoir $\mathcal{T}$ plus grand ?

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.
- Technique : on montre que ce système n'admet pas de $(T, T, [0, 2\pi])$-stabilisateur ($\alpha \equiv 1$)

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.
- Technique : on montre que ce système n'admet pas de $(T, T, [0, 2\pi])$-stabilisateur ($\alpha \equiv 1$) et on considère uniquement les retards constants τ.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

  avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.
- Technique : on montre que ce système n'admet pas de $(T, T, [0, 2\pi])$-stabilisateur ($\alpha \equiv 1$) et on considère uniquement les retards constants τ.
- Équation caractéristique : $\lambda^2 + k_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + 1 + k_1 e^{-\lambda\tau} = 0$.

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.
- Technique : on montre que ce système n'admet pas de $(T, T, [0, 2\pi])$-stabilisateur ($\alpha \equiv 1$) et on considère uniquement les retards constants τ.
- Équation caractéristique : $\lambda^2 + k_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + 1 + k_1 e^{-\lambda\tau} = 0$.
- Pour tous k_1, k_2, il existe $\tau \in [0, 2\pi]$ tel que cette équation ait une racine de partie réelle positive ou nulle

Stabilisation par retour d'état avec retard

Un exemple de non-stabilisation

- On considère
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$
avec un retour d'état $u(t) = -\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} x(t - \tau(t))$.
- Pas de $(T, \mu, \mathcal{T})$-stabilisateur si $\mathcal{T}$ contient un intervalle de longueur plus grand que 2π.
- Technique : on montre que ce système n'admet pas de $(T, T, [0, 2\pi])$-stabilisateur ($\alpha \equiv 1$) et on considère uniquement les retards constants τ.
- Équation caractéristique : $\lambda^2 + k_2 \lambda e^{-\lambda\tau} + 1 + k_1 e^{-\lambda\tau} = 0$.
- Pour tous k_1, k_2, il existe $\tau \in [0, 2\pi]$ tel que cette équation ait une racine de partie réelle positive ou nulle $\Rightarrow$ non-stabilisabilité.