

Taux de convergence des vibrations dans une structure d'éléments flexibles

Sujet proposé par G. Mazanti

guilherme.mazanti@polytechnique.edu

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~mazanti>

Introduction

La propagation de vibrations dans les structures constituées d'un ensemble de barres unidimensionnelles interconnectées est d'un très grand intérêt pour les sciences de l'ingénieur ; pour s'en convaincre, il suffit de penser au très grand nombre de telles structures (grues, bras articulés, tour Eiffel, et d'autres structures en treillis) qui sont soumises à des sources de vibration (mouvement d'une grue, vent, tremblements de terre, ...). Il s'agit également d'un problème très intéressant d'un point de vue mathématique : même dans des modèles assez simples de ces systèmes, l'analyse nécessaire pour étudier les questions de détection, contrôle et stabilisation de vibrations dans une telle structure est loin d'être triviale et nécessite l'utilisation de techniques avancées d'analyse d'équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails, voir [6].

Dans ce projet, on propose d'étudier le taux de convergence vers l'équilibre des vibrations dans ce type de structure à travers une simulation numérique de ces vibrations, afin de vérifier numériquement certains résultats théoriques obtenus dans [2–4, 7]. On considère ici une structure modélisée par un ensemble connexe $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^d$ de la forme

$$\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^N e_j,$$

où e_j est une courbe lisse de \mathbb{R}^d de longueur L_j , que l'on identifie avec le segment $[0, L_j]$. On suppose que deux courbes $e_j, e_k, j \neq k$, ne peuvent s'intercepter que dans une extrémité commune. Les extrémités des e_j sont appelées les *nœuds* de \mathcal{R} . L'ensemble \mathcal{R} peut être vu comme un graphe de N arêtes, e_1, \dots, e_N , dont les sommets sont les nœuds de \mathcal{R} . Un exemple d'une telle structure est représentée sur la Figure 1.

Dans ce modèle simplifié, on suppose que les vibrations de \mathcal{R} sont scalaires, modélisées par une fonction $u : [0, +\infty) \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$: la valeur de $u(t, x)$ représente l'amplitude de la vibration au point $x \in \mathcal{R}$ à l'instant $t \geq 0$. Pour chaque courbe e_j , on dénote par u_j la restriction de u à $[0, +\infty) \times e_j$, et, en identifiant e_j à l'intervalle $[0, L_j]$, on considère u_j définie sur $[0, +\infty) \times [0, L_j]$.

On dénote par \mathcal{N} l'ensemble des nœuds de \mathcal{R} , i.e. \mathcal{N} est l'ensemble fini des extrémités des courbes $e_j, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Pour chaque $v \in \mathcal{N}$, on dénote par \mathcal{E}_v l'ensemble des $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tels que v est une extrémité de la courbe e_j . On dit que le nœud $v \in \mathcal{N}$ est *extérieur* si \mathcal{E}_v ne contient qu'un seul élément, ou *intérieur* sinon. L'ensemble des nœuds extérieurs (resp. intérieurs) de \mathcal{R} est noté par \mathcal{N}_{ext} (resp. \mathcal{N}_{int}).

Dans ce projet, on supposera que le système n'est amorti que dans certains de ses nœuds extérieurs. On dénote $\mathcal{N}_a \subset \mathcal{N}_{\text{ext}}$ l'ensemble des nœuds amortis et $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{N}_a$. On supposera toujours que ces deux ensembles sont non-vides.

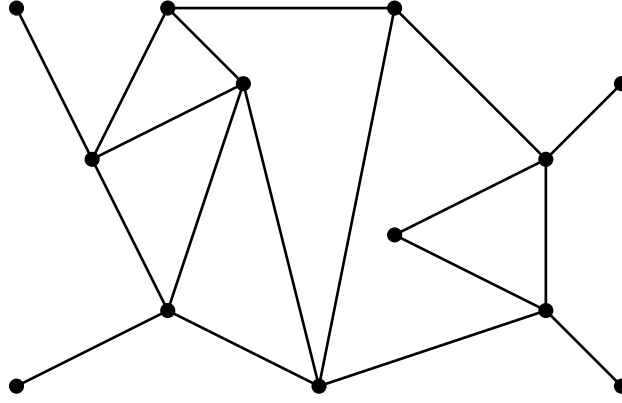


FIGURE 1 : Exemple d'un ensemble \mathcal{R} avec $N = 18$ et 13 nœuds

Pour $v \in \mathcal{N}$ et $j \in \mathcal{E}_v$, on dénote par n_j le vecteur unitaire tangent à e_j en v et orienté vers l'extérieur de e_j . La dérivée normale $\frac{\partial u_j}{\partial n_j}(t, v)$ vaut ainsi $\frac{\partial u_j}{\partial x}(t, L_j)$ (resp. $-\frac{\partial u_j}{\partial x}(t, 0)$) si v correspond à l'extrémité $x = L_j$ (resp. $x = 0$) de e_j .

La Figure 2 illustre ces définitions. Les 9 nœuds représentés en **bleu** sont les nœuds intérieurs, appartenant à l'ensemble \mathcal{N}_{int} . Les 4 autres nœuds sont les nœuds extérieurs ; on suppose ici que deux de ces nœuds, représentés en **vert**, sont amortis, appartenant à l'ensemble \mathcal{N}_a , et les deux autres, représentés en **rouge**, ne sont pas amortis, appartenant à \mathcal{N}_n . Pour le nœud v_1 représenté sur la figure, on a $\mathcal{E}_{v_1} = \{1, 2, 3\}$, et, pour le nœud v_2 et $j = 4$, la normale n_4 en v_2 est le vecteur représenté sur la figure.

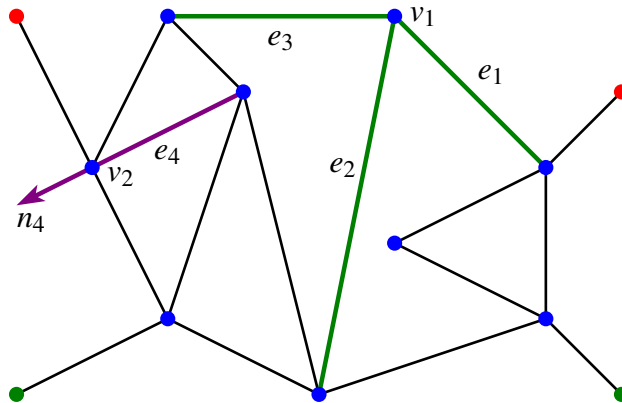


FIGURE 2 : Illustration des définitions utilisées dans ce projet

On choisit un modèle simple pour l'amplitude des vibrations u de \mathcal{R} où, dans chaque élément e_j , la vibration se propage selon l'équation des ondes. On s'intéresse donc au système suivant, où, pour chaque $v \in \mathcal{N}_a$ et pour $j \in \mathcal{E}_v$, $\nu_j > 0$ est le coefficient d'amortissement sur le nœud v .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(t, x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, t \in [0, +\infty), x \in [0, L_j], \\ u_j(t, v) = u_k(t, v), & v \in \mathcal{N}, j, k \in \mathcal{E}_v, t \in [0, +\infty), \\ \sum_{j \in \mathcal{E}_v} \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(t, v) = 0, & v \in \mathcal{N}_{\text{int}}, t \in [0, +\infty), \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(t, v) = -\nu_j \frac{\partial u_j}{\partial n_j}(t, v), & v \in \mathcal{N}_a, j \in \mathcal{E}_v, t \in [0, +\infty), \\ u_j(t, v) = 0, & v \in \mathcal{N}_n, j \in \mathcal{E}_v, t \in [0, +\infty), \\ u_j(0, x) = u_{j,0}(x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, x \in [0, L_j], \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(0, x) = u_{j,1}(x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, x \in [0, L_j]. \end{array} \right. \quad (1)$$

1 Simulation d'un seul élément

Dans cette section, on se restreint au cas $N = 1$. On n'a donc qu'un seul élément vibrant, que l'on identifie au segment $[0, L]$, modélisé par le système suivant, qui est amorti à l'extrémité $x = 0$ avec un coefficient d'amortissement $\nu > 0$ et sans amortissement à l'extrémité $x = L$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \nu \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0), & t \in [0, +\infty), \\ u(t, L) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x), & x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (2)$$

L'énergie totale d'une solution u de ce système est donnée par la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 \right) dx.$$

En termes physiques, le terme en $\frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à l'énergie cinétique et le terme en $\frac{\partial u}{\partial x}$, à l'énergie potentielle.

1.1 Analyse théorique

Dans toute cette section, on supposera que u est une solution régulière de (2).

Question 1.1. Calculer la dérivée en temps de l'énergie totale $E(t)$ et montrer qu'elle décroît. Que se passe-t-il si $\nu = 0$?

On veut maintenant utiliser l'expression de $\frac{d}{dt}E(t)$ obtenue dans la Question 1.1 pour obtenir

plus d'informations sur la décroissance de $E(t)$. Pour cela, on définit

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right),$$

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right).$$

Question 1.2. Montrer que le couple (f, g) est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ f(t, 0) = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} g(t, 0), & t \in [0, +\infty), \\ g(t, L) = -f(t, L), & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Question 1.3. Montrer que, pour tout $x \in [0, L]$ et tout $t \geq 0$, on a $g(t+x, 0) = g(t, x)$. En déduire que, pour $T \in [0, L]$, on a

$$\int_t^{t+T} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\tau, 0) \right|^2 d\tau = \frac{2}{(\nu + 1)^2} \int_0^T |g(t, x)|^2 dx.$$

Question 1.4. Montrer que, pour tout $x \in [0, L]$ et tout $t \geq 0$, on a $f(t+x, L) = f(t, L-x)$. En déduire que, pour $T \in [L, 2L]$, on a

$$\int_t^{t+T} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\tau, 0) \right|^2 d\tau = \frac{2}{(\nu + 1)^2} \left(\int_0^L |g(t, x)|^2 dx + \int_{2L-T}^L |f(t, x)|^2 dx \right). \quad (3)$$

Question 1.5. Utiliser (3) et la Question 1.1 pour montrer la décroissance exponentielle de l'énergie $E(t)$, i.e., pour montrer qu'il existe des constantes $C, \gamma > 0$ telles que $E(t) \leq Ce^{-\gamma t} E(0)$ pour toute solution de (2) et tout $t \geq 0$. Combien vaut γ en fonction de ν ? Quel est le comportement de γ lorsque $\nu \rightarrow 0$ ou $\nu \rightarrow +\infty$?

1.2 Simulation

On veut maintenant simuler le système (2) pour vérifier la décroissance exponentielle démontrée à la Question 1.5. Pour cela, on fera une discrétisation de (2) par la méthode des différences finies. On utilisera ici le θ -schéma centré, présenté dans la Section 2.3.2 du polycopié du cours. Ce schéma a l'avantage de préserver l'énergie discrète en absence de terme d'amortissement (voir la Section 2.3.2 de [1] pour plus de détails), ce qui est très utile pour les simulations de taux de décroissance de l'énergie.

Question 1.6. Adapter le θ -schéma du cours pour obtenir une méthode aux différences finies pour (2), prenant en compte les conditions aux bords de (2). Préciser également le choix des conditions initiales pour le schéma en termes des fonctions u_0 et u_1 . Écrire le schéma sous une forme matricielle.

Question 1.7. Implémenter le schéma de la Question 1.6 en Scilab ou Matlab. Tester ce schéma avec plusieurs choix de $\nu > 0$ et $\theta \in [0, 1/2]$ et avec quelques choix de conditions initiales u_0 et u_1 . Commenter brièvement les résultats obtenus.

Question 1.8. Modifier le code de la Question 1.7 pour calculer, à chaque pas de temps, une approximation de l'énergie $E(t)$ et l'afficher à la fin du calcul. Que peut-on conclure sur la décroissance de l'énergie ? Comment varie le taux de décroissance en fonction de ν ? On s'intéressera particulièrement aux limites $\nu \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow +\infty$.

2 Simulation d'une structure plus générale

On passe maintenant au cas plus général du système (1). Dans ce cas, l'énergie totale est donnée par

$$E(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \left(\left| \frac{\partial u_j}{\partial t}(t,x) \right|^2 + \left| \frac{\partial u_j}{\partial x}(t,x) \right|^2 \right) dx.$$

2.1 Analyse théorique

Question 2.1. Montrer la décroissance de l'énergie totale $E(t)$ par le calcul de sa dérivée. Quelle interprétation peut-on donner à la troisième équation de (1) ?

La technique utilisée dans les Questions 1.2 à 1.5 pour montrer la convergence exponentielle de l'énergie vers zéro ne marche pas dans le cas plus général du système (1). En effet, l'énergie ne décroît pas forcément vers 0 en général, et, même lorsque cela est le cas, cette convergence peut ne pas être exponentielle. Les estimées de la vitesse de cette convergence sont beaucoup plus délicates à obtenir ; pour plus de détails, voir [2–4, 7]. En général, la vitesse de convergence dépend de la topologie du graphe qui détermine la structure \mathcal{R} et des rapports de rationalité entre les longueurs L_j des différents éléments e_j . Pour simplifier, on ne considère dans la suite que les structures *étoilées*, c'est-à-dire les structures dans lesquelles il n'y a qu'un seul nœud intérieur. Une telle structure est représentée sur la Figure 3.

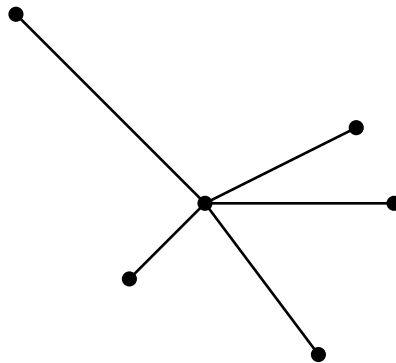


FIGURE 3 : Exemple de structure étoilée avec $N = 5$ éléments

Dans le cas d'une structure étoilée, quitte à reparamétriser les e_j , on peut supposer que, pour chaque e_j , $x = 0$ correspond à son nœud extérieur et $x = L_j$, à son nœud intérieur. Quitte à renuméroter les e_j , on peut supposer que les nœuds amortis sont les nœuds extérieurs de e_j pour $j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket$, et donc les nœuds extérieurs de e_j pour $j \in \llbracket N_d + 1, N \rrbracket$ ne sont pas amortis, où

$N_d \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ est le nombre de nœuds amortis. Avec ces notations, (1) peut s'écrire comme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(t, x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, t \in [0, +\infty), x \in [0, L_j], \\ u_j(t, L_j) = u_k(t, L_k), & j, k \in \llbracket 1, N \rrbracket, t \in [0, +\infty), \\ \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x}(t, L_j) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(t, 0) = v_j \frac{\partial u_j}{\partial x}(t, 0), & j \in \llbracket 1, N_d \rrbracket, t \in [0, +\infty), \\ u_j(t, 0) = 0, & j \in \llbracket N_d + 1, N \rrbracket, t \in [0, +\infty), \\ u_j(0, x) = u_{j,0}(x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, x \in [0, L_j], \\ \frac{\partial u_j}{\partial t}(0, x) = u_{j,1}(x), & j \in \llbracket 1, N \rrbracket, x \in [0, L_j]. \end{array} \right. \quad (4)$$

Même dans cette classe particulière de systèmes, il n'est pas nécessaire que l'énergie décroisse vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Question 2.2. Supposons qu'il existe $i, j \in \llbracket N_d + 1, N \rrbracket$, $i \neq j$, tels que $L_i/L_j \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe des solutions de (4) pour lesquelles $E(t)$ est constante non-nulle. (*Suggestion* : Construire explicitement une solution périodique à l'aide des sinus, supportée sur les éléments e_i, e_j pour lesquels $L_i/L_j \in \mathbb{Q}$).

On supposera désormais que $L_i/L_j \notin \mathbb{Q}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ avec $i \neq j$. Dans ce cas, il est possible de montrer la décroissance de l'énergie vers 0 par le principe d'invariance de LaSalle (ce que l'on ne fera pas ici), mais cette méthode ne permet pas de donner une estimée de la vitesse de convergence vers 0. Les estimées des vitesses de convergence peuvent être obtenues par des méthodes bien plus élaborées, et on présente ici, à titre d'exemple, le résultat suivant, démontré dans [7], qui donne une estimée polynomiale du taux de convergence vers zéro de l'énergie sous certaines hypothèses sur les longueurs L_j .

Théorème 1 (Proposition 4.4, [7]). *Supposons que $N_d = 1$, que $\{L_1, \dots, L_N\}$ est linéairement indépendant sur le corps des rationnels \mathbb{Q} , et que L_i/L_j est un nombre algébrique pour tous $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Alors il existe des constantes $C, \alpha > 0$, dépendantes de la condition initiale (u_0, u_1) , telles que, pour tout $t \geq 0$,*

$$E(t) \leq \frac{C}{(t+1)^\alpha}.$$

Lorsque l'on augmente le nombre de nœuds amortis N_d , on s'attend à ce que la vitesse de convergence augmente également, et, dans le cas $N_d = N-1$, on obtient une convergence exponentielle, comme le montre le résultat suivant, qui peut être obtenu, par exemple, en suivant la méthode utilisée dans [5] pour un problème similaire.

Théorème 2. *Supposons que $N_d = N-1$. Alors il existe des constantes $C, \gamma > 0$, indépendantes de la condition initiale (u_0, u_1) , telles que, pour tout $t \geq 0$,*

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} E(0).$$

2.2 Simulation

On propose maintenant de simuler le système (4) pour vérifier numériquement les résultats des Théorèmes 1 et 2. Comme dans la Section 1.2, on utilisera un θ -schéma centré pour l'implémentation de la méthode des différences finies.

Question 2.3. Écrire une méthode de différences finies pour (4) à partir du θ -schéma centré, prenant en compte les conditions aux nœuds de (4). Préciser également le choix des conditions initiales pour le schéma en termes des fonctions $u_{j,0}$ et $u_{j,1}$. Écrire le schéma sous une forme matricielle.

Pour les implémentations des questions suivantes, on fixe $N = 5$.

Question 2.4. Implémenter le schéma de la Question 2.3 en Scilab ou Matlab dans les cas $N_d = 1$ et $N_d = 4$. Tester ce schéma avec quelques choix de $v_j > 0$ et $\theta \in [0, 1/2]$. Commenter brièvement les résultats obtenus.

Question 2.5. Dans le cas $N_d = 1$, choisir des longueurs L_1, \dots, L_5 satisfaisant les hypothèses du Théorème 1. Calculer, à chaque pas de temps, une approximation de l'énergie $E(t)$ et l'afficher à la fin du calcul. Que peut-on conclure sur la décroissance de l'énergie ? Répéter la simulation pour quelques valeurs de v_1 .

Question 2.6. Faire la simulation dans le cas $N_d = 4$ et afficher l'évolution de l'énergie en temps. Commenter les résultats observés.

Références

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.
- [2] K. Ammari and M. Jellouli. Stabilization of star-shaped networks of strings. *Differential Integral Equations*, 17(11-12) :1395–1410, 2004.
- [3] K. Ammari and M. Jellouli. Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings. *Appl. Math.*, 52(4) :327–343, 2007.
- [4] K. Ammari, M. Jellouli, and M. Khenissi. Stabilization of generic trees of strings. *J. Dyn. Control Syst.*, 11(2) :177–193, 2005.
- [5] Y. Chitour, G. Mazanti, and M. Sigalotti. Persistently damped transport equation on a network of circles. (Preprint), 2014.
- [6] R. Dáger and E. Zuazua. *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, volume 50 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [7] J. Valein and E. Zuazua. Stabilization of the wave equation on 1-D networks. *SIAM J. Control Optim.*, 48(4) :2771–2797, 2009.