

Comportement asymptotique des équations d'ondes unidimensionnelles

Sujet proposé par G. Mazanti

guilherme.mazanti@polytechnique.edu

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~mazanti>

Introduction

Plusieurs systèmes physiques peuvent être modélisés par des systèmes d'équations d'ondes unidimensionnelles couplées. C'est le cas, par exemple, des réseaux de télécommunications, dans lesquels des messages, transmises le plus souvent sous forme de signaux électriques ou électromagnétiques dans un câble, sont échangées par plusieurs agents interconnectés. Le réseau de lignes de transmission à haute tension en fournit un autre exemple, où la tension et le courant électrique se propagent le long de chaque ligne selon une équation d'onde, et la propagation dans les différentes lignes est couplée dans leurs points d'intersection. Un autre exemple, issu de la mécanique, est celui de la propagation de petites vibrations dans des structures rigides constituées d'un ensemble de barres unidimensionnelles interconnectées (comme les grues, les bras articulés, la tour Eiffel, et d'autres structures en treillis).

Ces exemples illustrent l'intérêt pratique de l'étude des systèmes d'équations d'ondes unidimensionnelles. Il s'agit également d'un problème très intéressant d'un point de vue mathématique : même dans des modèles assez simples de ces systèmes, l'analyse nécessaire pour étudier les questions de détection, contrôle et stabilisation des ondes est loin d'être triviale et nécessite l'utilisation de techniques avancées d'analyse d'équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails, voir [3].

Dans ce projet, on propose d'étudier le comportement asymptotique de ces systèmes dans deux structures unidimensionnelles très simples, représentées sur la Figure 1 : un seul segment de droite de longueur L , et trois segments de droite de longueurs L_1 , L_2 et L_3 qui s'intersectent dans un point.

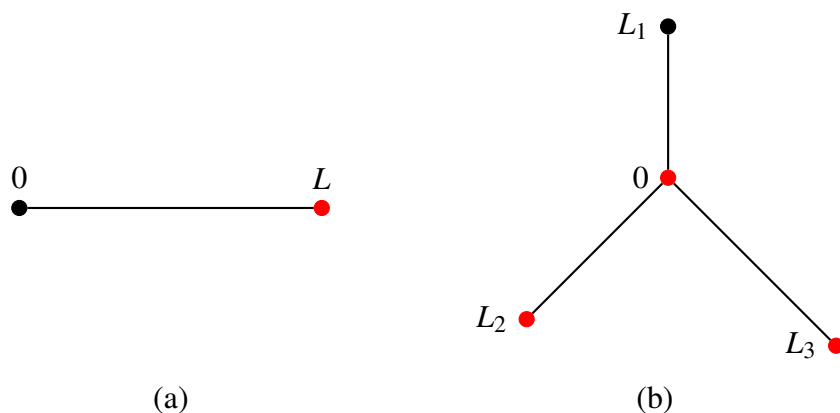


FIGURE 1 : Structures unidimensionnelles utilisées dans ce projet : (a) un seul segment de droite, (b) trois segments de droite qui s'intersectent dans un point.

1 Simulation de l'équation d'onde dans un segment

Dans cette section, on considère la propagation d'onde dans un segment de droite de longueur L , que l'on identifie avec l'intervalle $[0, L]$. On suppose que l'extrémité correspondante à $x = 0$, représentée en noir sur la Figure 1(a), est soumise à une condition de bord de type Dirichlet, et que l'extrémité correspondante à $x = L$, représentée en rouge sur la Figure 1(a), est soumise à un terme d'amortissement. Le système correspondant s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ u(t, 0) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, L) = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}(t, L), & t \in [0, +\infty), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (1)$$

où $\nu \in \mathbb{R}$ est le coefficient d'amortissement à l'extrémité $x = L$. L'énergie totale d'une solution u de ce système à l'instant t est donnée par la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 \right) dx.$$

En termes physiques, si (1) modélise la propagation d'une onde mécanique, le terme en $\frac{\partial u}{\partial t}$ correspond à l'énergie cinétique et le terme en $\frac{\partial u}{\partial x}$, à l'énergie potentielle.

1.1 Analyse théorique

Dans toute cette section, on suppose que u est une solution régulière de (1).

Question 1.1. Calculer la dérivée en temps de l'énergie totale E . Caractériser la croissance ou la décroissance de l'énergie en fonction de ν .

On veut maintenant utiliser l'expression de $\frac{dE}{dt}$ obtenue dans la Question 1.1 pour obtenir plus d'informations sur le comportement asymptotique E . Pour cela, on définit

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right), \\ g(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Question 1.2. Montrer que, si $\nu \neq -1$, le couple (f, g) est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, x), & t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \\ f(t, 0) = -g(t, 0), & t \in [0, +\infty), \\ g(t, L) = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} f(t, L), & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Que se passe-t-il si $\nu = -1$? Et si $\nu = 1$?

On suppose désormais que $\nu \neq -1$.

Question 1.3. Montrer que, pour tout $x \in [0, L]$ et tout $t \geq 0$, on a $f(t+x, L) = f(t, L-x)$. En déduire que, pour $T \in [0, L]$ et $t \geq 0$, on a

$$\int_{L-T}^L |f(t, x)|^2 dx = \frac{(\nu+1)^2}{2} \int_t^{t+T} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\tau, L) \right|^2 d\tau.$$

Question 1.4. Montrer que, pour tout $x \in [0, L]$ et tout $t \geq 0$, on a $g(t+x, 0) = g(t, x)$. En déduire que, pour $T \in [0, L]$ et $t \geq 0$, on a

$$\int_0^T |g(t, x)|^2 dx = \frac{(\nu+1)^2}{2} \int_{t+L}^{t+L+T} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\tau, L) \right|^2 d\tau.$$

Question 1.5. Utiliser les questions précédentes pour évaluer le rapport entre $E(t+2L)$ et $E(t)$ en fonction de ν . En déduire le comportement asymptotique de $E(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ en fonction de ν . Que se passe-t-il dans les cas $\nu \rightarrow -1$, $\nu = 0$, $\nu = 1$ et $\nu \rightarrow \pm\infty$?

Question 1.6. Calculer

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log E(t)}{t}.$$

Comment λ se relie-t-il à la vitesse de convergence ou divergence exponentielle de $E(t)$? Quel est son comportement lorsque $\nu \rightarrow -1$, $\nu = 0$, $\nu = 1$ et $\nu \rightarrow \pm\infty$? Interpréter.

1.2 Simulation

On veut maintenant simuler le système (1) pour vérifier le comportement asymptotique décrit à la Question 1.5. Pour cela, on fera une discrétisation de (1) par la méthode des différences finies. On utilisera ici le θ -schéma centré, présenté dans la Section 2.3.2 du polycopié du cours. Ce schéma a l'avantage de préserver l'énergie discrète en absence d'amortissement (voir la Section 2.3.2 de [2] pour plus de détails), ce qui est très utile pour les simulations du comportement asymptotique de l'énergie.

Question 1.7. Adapter le θ -schéma du cours pour obtenir un schéma de différences finies pour (1), prenant en compte ses conditions aux bords. On discrétisera la troisième équation de (1) par un schéma implicite en temps. Préciser également le choix des conditions initiales pour le schéma en termes des fonctions u_0 et u_1 . Écrire le schéma sous une forme matricielle.

Question 1.8. Implémenter le schéma de la Question 1.7 en *Scilab* ou *Matlab* avec $L = 1$. Tester ce schéma avec plusieurs choix de $\nu \in (-10, 10)$ et quelques choix de $\theta \in [0, 1/2]$ et de conditions initiales u_0 et u_1 . Interpréter les résultats obtenus.

Question 1.9. Simuler le système avec des conditions initiales (u_0, u_1) satisfaisant $u_1 = u_0'$ ou $u_1 = -u_0'$. Quel est le comportement de ces solutions ? Interpréter à l'aide des fonctions f et g définies dans (2).

Question 1.10. Modifier le code de la Question 1.8 pour calculer, à chaque pas de temps, une approximation de l'énergie $E(t)$, et l'afficher à la fin du calcul. Que peut-on conclure sur le comportement asymptotique de l'énergie ? Comment varie-t-il en fonction de ν ?

Question 1.11. Calculer numériquement $\frac{E(t+2L)}{E(t)}$ pour plusieurs valeurs de ν dans $(-10, 10)$ et comparer avec la Question 1.5. Comment peut-on interpréter les cas $\nu \rightarrow -1$, $\nu = 0$, $\nu = 1$ et $\nu \rightarrow \pm\infty$? Quel est le meilleur choix de ν pour avoir la plus grande vitesse de convergence possible ? Que se passe-t-il dans ce cas ?

2 Simulation de l'équation d'onde dans trois segments

On considère maintenant le système d'équations d'onde dans trois segments représenté sur la Figure 1(b). On suppose que le système a une condition au bord de Dirichlet dans l'extrémité correspondante à L_1 , représentée en noir sur la figure, et des termes d'amortissement aux extrémités L_2 et L_3 et au point commun 0, représentés en rouge sur la figure. Le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t,x), & i \in \{1,2,3\}, t \in [0, +\infty), x \in [0, L_i], \\ u_1(t, L_1) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(t, L_i) = -v_i \frac{\partial u}{\partial x}(t, L_i), & i \in \{2,3\}, t \in [0, +\infty), \\ u_1(t, 0) = u_2(t, 0) = u_3(t, 0), & t \in [0, +\infty), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, 0) = -v_1 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x}(t, 0), & t \in [0, +\infty), \\ u_i(0, x) = u_{0,i}(x), & i \in \{1,2,3\}, x \in [0, L_i], \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(0, x) = u_{1,i}(x), & i \in \{1,2,3\}, x \in [0, L_i], \end{array} \right. \quad (3)$$

où $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ sont trois coefficients d'amortissement. On remarque que la quatrième équation de (3) donne la continuité de la solution au point $x = 0$, et, grâce à elle, le membre de gauche de la cinquième équation peut être remplacé par $\frac{\partial u_i}{\partial t}(t, 0)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. L'énergie totale d'une solution (u_1, u_2, u_3) de ce système est

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) \right|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,x) \right|^2 \right) dx.$$

Compte tenu des résultats de la Section 1, on fixe dans toute la suite $v_2 = v_3 = 1$.

2.1 Analyse théorique

Question 2.1. Calculer la dérivée de l'énergie totale E .

À l'image de ce qui a été fait dans la Section 1, on introduit, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, les fonctions

$$\begin{aligned} f_i(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,x) \right), \\ g_i(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,x) \right). \end{aligned}$$

Question 2.2. Montrer que ces fonctions satisfont le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_i}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial f_i}{\partial x}(t,x), \quad i \in \{1,2,3\}, t \in [0, +\infty), x \in [0, L_i], \\ \frac{\partial g_i}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(t,x), \quad i \in \{1,2,3\}, t \in [0, +\infty), x \in [0, L_i], \\ g_1(t, L_1) = -f_1(t, L_1), \quad t \in [0, +\infty), \\ g_i(t, L_i) = 0, \quad i \in \{2,3\}, t \in [0, +\infty), \\ \begin{pmatrix} f_1(t,0) \\ f_2(t,0) \\ f_3(t,0) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} g_1(t,0) \\ g_2(t,0) \\ g_3(t,0) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, +\infty), \end{array} \right.$$

où M est une matrice que l'on déterminera en fonction de v_1 . Quelle est la condition sur v_1 pour que cette matrice soit bien définie ? On notera v_* la valeur de v_1 pour laquelle M n'est pas définie.

Question 2.3. Décrire le comportement de $g_i(t,x)$ pour $i \in \{2,3\}$ et $t \geq L_i$.

Question 2.4. Dans cette question, on remplace la cinquième équation de (3) par

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x}(t,0) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

ce qui correspond à la limite $v_1 \rightarrow \pm\infty$. Calculer la dérivée de l'énergie totale E dans ce cas. Quelle interprétation peut-on donner à (4) ?

Question 2.5. Calculer la matrice M dans la limite $v_1 \rightarrow \pm\infty$. Combien vaut $M^T M$? Interpréter ce résultat à l'aide de celui de la Question 2.4.

Question 2.6. Calculer la matrice M dans le cas $v_1 = 0$. Que se passe-t-il avec le système dans cette situation ? Décrire le comportement de u_1, u_2 et u_3 .

Question 2.7. Calculer la matrice M dans le cas $v_1 = 1$. Prenant en compte la réponse à la Question 2.3, décrire le comportement du système dans ce cas. Que valent les solutions pour $t \geq 2L_1 + \max\{L_2, L_3\}$?

2.2 Simulation

On propose maintenant de simuler le système (3) pour vérifier numériquement les réponses aux Questions 2.3 à 2.7. Comme dans la Section 1.2, on utilisera un θ -schéma centré pour l'implémentation de la méthode des différences finies.

Question 2.8. Écrire un schéma de différences finies pour (3) à partir du θ -schéma centré, prenant en compte les conditions aux bords de (3). Pour la cinquième équation de (3), on pourra utiliser la discrétisation

$$\frac{u_{1,1}^{n+1} - u_{1,1}^n}{\Delta t} = -v_1 \sum_{i=1}^3 \frac{u_{i,2}^{n+1} - u_{i,1}^{n+1}}{\Delta x}, \quad (5)$$

où $u_{i,j}^n$ est une approximation de $u_i(n\Delta t, j\Delta x)$. Préciser également le choix des conditions initiales pour le schéma en termes des fonctions $u_{0,i}$ et $u_{1,i}$. Écrire le schéma sous une forme matricielle.

Remarque : Même si le θ -schéma centre de la Section 2.3.2 du polycopié du cours est inconditionnellement stable pour $\theta \in [1/4, 1/2]$, cette propriété n'est pas préservée par la discrétisation (5). On ne demande pas d'étudier la stabilité du schéma ainsi obtenu ni d'obtenir explicitement la condition de stabilité CFL, mais il faut garder cela en tête lors du choix des pas de temps et d'espace dans les simulations des questions suivantes.

Question 2.9. Implémenter le schéma de la Question 2.8 en *Scilab* ou *Matlab* pour le choix de longueurs $L_1 = 2$, $L_2 = \sqrt{7}$, $L_3 = \pi$. Tester ce schéma avec plusieurs choix de $v_1 \in (-10, 10)$ et quelques choix de $\theta \in [0, 1/2]$ et de conditions initiales. Interpréter les résultats obtenus.

Question 2.10. Inclure dans le code de la Question 2.9 un calcul approché de l'énergie E à chaque pas de temps. Vérifier comment le comportement asymptotique de E change lorsque l'on varie v_1 . Que se passe-t-il lorsque v_1 est proche de la valeur v_* de la Question 2.2 ?

Question 2.11. Pour une condition initiale et une valeur de θ fixées, simuler le système pour $v_1 \in \{-6; -3; -2; -1; -0,5; 0; 0,2; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,25; 1,5; 2, 3, 6\}$ et calculer à chaque simulation $\frac{E(T)}{E(0)}$ (pour garantir la stabilité du schéma utilisé, il faudra probablement changer les pas Δt et Δx d'une simulation à l'autre). Avec les résultats obtenus, faire un graphique de $\frac{E(T)}{E(0)}$ en fonction de v_1 (une échelle logarithmique peut être intéressante pour une meilleure visualisation). Comparer avec les réponses aux Questions 2.2, 2.6 et 2.7. Commenter.

Pour aller plus loin

Un exercice intéressant (mais qui n'est pas demandé dans le cadre de ce projet) est de reprendre l'analyse théorique de la Section 2.1 dans le cas de N segments avec un point en commun, où l'on suppose que l'extrémité L_1 est soumise à une condition de Dirichlet et les extrémités L_2, \dots, L_N sont amorties comme dans (3).

Ce projet a été inspiré de l'article [1], qui étudie un système du type (3) non pas dans le cas des trois segments de la Figure 1(b) mais dans le cas général d'un arbre. La question est de donner des conditions pour les coefficients d'amortissement v_i aux nœuds de l'arbre pour garantir la convergence vers zéro de la solution en temps fini.

La convergence en temps fini est une conséquence de l'absence de réflexions des ondes aux extrémités des intervalles, ce qui a un très grand intérêt en pratique. Par exemple, dans la transmission de données de A à B sous forme d'un signal électrique dans un câble, la situation idéale est que le signal émis par A soit reçu intégralement par B , sans perte dues aux réflexions de ce signal dans le câble. Choisir les bonnes valeurs de v_i dans ce cas est un problème appelé *adaptation d'impédances*.

Références

- [1] F. Alabau-Boussouira, V. Perrollaz, and L. Rosier. Finite time stabilization of a network of strings. *Mathematical Control and Related Fields*, 5(4), 2015.
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, France, 2012.
- [3] R. Dáger and E. Zuazua. *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, volume 50 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.